

T.C.
BURSA TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

HOMOTOPİK UZAKLIK ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Özge GENÇ KARA

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz 2023

T.C.
BURSA TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

HOMOTOPİK UZAKLIK ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Özge GENÇ KARA
(21435022201)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ayşe BORAT

Temmuz 2023

BTÜ, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nün 21435022201 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Özge GENÇ KARA, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "HOMOTOPİK UZAKLIK ÜZERİNE" başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı: **Doç. Dr. Ayşe BORAT** **…….**
Bursa Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri: **Prof. Dr. Nil ORHAN ERTAŞ** **……..**
Bursa Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Tane VERGİLİ **……..**
Karadeniz Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi:

Savunma Tarihi: **04/07/2023**

20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, Bursa Teknik Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

İNTİHAL BEYANI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belgelediğimi, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim.

Öğrencinin Adı Soyadı: Özge GENÇ KARA

İmzası:

Sevgili babam matematik öğretmeni merhum Şerif GENÇ'e

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanması sürecinde çalışmamı yönlendiren, katkı sağlayan ve desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Ayşe BORAT'a, yüksek lisans eğitimime büyük katkısı olan saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Nil ORHAN ERTAŞ'a, tezimi okuyup katkı sağlayan değerli jüri üyesi Sayın Doç. Dr. Tane VERGİLİ'ye hayatımın her anında yanımda olan sevgili anneme ve her zaman desteğini hissettiren eşime teşekkürü bir borç bilirim.

Temmuz 2023 Özge GENÇ KARA

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ…….……. vii

İÇİNDEKİLER……viii

SEMBOLLER……ix

ŞEKİL LİSTESİ…….…….x

ÖZET……..……..……. xi

ABSTRACT…….. xii

1. GİRİŞ...……..……..1

2. TEMEL KAVRAMLAR……...……..…….…….…….3

3. HOMOTOPİ VE TEMEL GRUPLAR……...……...……...6

3.1. Homotopi……...…….……...……6

3.2. Temel Gruplar……...……..…….……....11

4. HOMOTOPİK UZAKLIK……..……...…..20

4.1. Homotopik Uzaklığın Özellikleri……..…….…….…....24

5. HOMOTOPİK UZAKLIĞIN OLUŞTURDUĞU PSEUDOMETRİK UZAYLAR.....……...……28

KAYNAKLAR…….. 32

ÖZGEÇMİŞ…….…..……...……..... 33

SEMBOLLER

P(X)	**:** X kümesinin kuvvet kümesi
$\boldsymbol{\pi_1(X,x_0)}$	**:** X topolojik uzayının $\mathbf{x_0}$ noktasındaki temel grubu
[f]	**:** f dönüşümünün denklik sınıfı
$\in$	**:** Eleman
$\cap$	**:** Kesişim
$\cup$	: Birleşim
$\cong$	**:** İzomorf
$\approx$	**:** Homeomorf
$\leq$	**:** Küçük eşit
$\geq$	**:** Büyük eşit
$\subset, \subseteq$	: Alt küme
$\trianglelefteq$	**:** Homotopi denkliği
$\trianglelefteq_p$	**:** Yol homotopi denkliği
$\Rightarrow$	**:** İse önermesi
$\Leftrightarrow$	**:** Ancak ve ancak önermesi
A \ B	**:** A kümesinin B kümesine göre farkı
cat(f)	**:** f dönüşümünün Lusternik-Schnirelmann kategorisi
cat(X)	**:** X topolojik uzayının Lusternik-Schnirelmann kategorisi
D(f, g)	**:** f ve g dönüşümleri arasındaki homotopik uzaklık
f o g	**:** f bileşke g dönüşümü
$\mathbf{f}\vert_{\mathbf{U}}$	**:** f dönüşümünün U kümesi üzerine kısıtlanışı
Ø	**:** Boş küme
$\mathbb{R}$	**:** Gerçel (reel) sayılar kümesi
secat(π)	**:** π fibrasyonunun Švarc genus'u
TC(X)	**:** X topolojik uzayının topolojik karmaşıklığı
$\mathbf{U}^C$	**:** U kümesinin tümleyeni
X / $\mathscr{R}$	**:** Bölüm uzayı ($\mathscr{R}$, X üzerinde denklik bağıntısı)

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1: α, β ve γ kapalı yolları gösterimi……..**1**

Şekil 3.1: H dönüşümünün gösterimi...……...……..**6**

Şekil 3.2: α ve β yollarının birim çemberin alt ve üst yarısını çizimi…….. **6**

Şekil 3.3: f, α ve ᾱ kapalı yollarının denklik sınıflarının gösterimi…....……...……**14**

Şekil 3.4: α ve β yollarının gösterimi....……...**17**

Şekil 3.5: h_* ve h dönüşümlerinin gösterimi……...…...…….**17**

Şekil 4.1: $\widetilde{f}$, i, $\widetilde{G}$, p ve G dönüşümlerinin diyagramı..……..……**21**

Şekil 4.2: q, π ve (f,g) dönüşümlerinin diyagramı...……**22**

Şekil 4.3: α, β, f, g, f ' ve g' dönüşümlerinin diyagramı……...…….**26**

Homotopik Uzaklık Üzerine

ÖZET

Bu tezin amacı homotopik uzaklığı özellikleriyle birlikte tanıtmak ve homotopik uzaklığın bazı özellikleri sayesinde homotopik uzaklığı pseudometrik olarak göstermektir. Homotopik uzaklık ilk kez Macias-Virgos and Mosquera-Lois tarafından tanıtılmıştır. Homotopik uzaklık, Lusternik-Schnirelmann kategorisinin ve topolojik karmaşıklığın (komplekslik) genelleştirilmesidir.

Tezin birinci bölümünde topolojik uzayların cebirsel yaklaşımla incelendiğinden ve cebirsel topoloji ile homotopinin arasındaki bağlantıdan bahsedilmiştir. Tezin üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümünde yer alan kavramların anlaşılmasına yardımcı olan temel kavramlar ikinci bölümde tanıtılmıştır. Homotopik uzaklığı tanımlamak için gerekli olan homotopi kavramı üçüncü bölümde verilmiştir. Dördüncü bölümde homotopik uzaklık tanımı verilmiş ve homotopik uzaklığın topolojik karmaşıklık ve Lusternik-Schnirelmann kategorisi ile olan bağlantısı ve homotopik uzaklığın özellikleri verilmiştir. Beşinci bölümde ise homotopik uzaklığın oluşturduğu pseudometrik uzaylardan bahsedilmiştir.

Anahtar kelimeler: Homotopi, homotopik uzaklık, topolojik karmaşıklık, Lusternik-Schnirelmann kategori.

On Homotopic Distance

ABSTRACT

The aim of this thesis is to introduce homotopic distance with its properties and show homotopic distance as pseudometric thanks to some properties of homotopic distance. Homotopic distance is first introduced by Macias-Virgos and Mosquera-Lois. Homotopic distance is a generalization of topological complexity and Lusternik-Schnirelmann category.

In the first chapter of the thesis, it is mentioned that topological spaces are examined with an algebraic approach and connection between algebraic topology and homotopy. The basic notions that help to understand the notions in the third, fourth and fifth chapters of thesis are introduced in the second chapter. Homotopy which is necessary to define homopic distance is given in the third chapter. In the fourth chapter, the definition of homopotic distance is given and the relation between topological complexity and Lusternik-Schnirelmann category with homotopic distance is given. Moreover, some properties of homotopic distance are given in that chapter. In the fifth chapter, pseudometric spaces induced by homotopic distance are given.

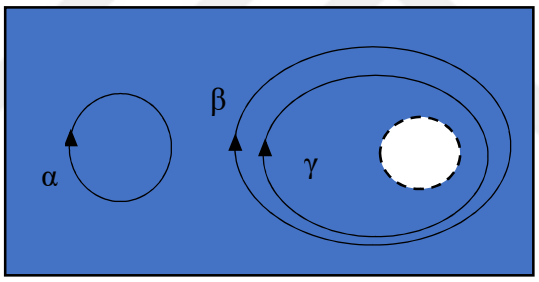
Keywords: Homotopy, homotopic distance, topological complexity, Lusternik-Schnirelmann category.

1. GİRİŞ

Topoloji, Yunanca bir kelime olup yüzey ya da uzay anlamına gelen “topos” ve bilim anlamına gelen “logos” kelimelerinden oluşmaktadır. Bir başka deyişle topoloji, yüzeyler ya da uzaylar bilimidir. Topoloji, topolojik uzaylar adı verilen uzayların sürekli dönüşümler altında değişmeyen özelliklerini inceleyen bir matematik dalıdır.

Cebirsel topoloji, topolojik uzayları cebirsel olarak incelemektedir. Topolojik uzaylara, aynı zamanda bir grup ya da bir halka yapısı olarak bakılabileceğini ortaya koymaktadır.

Temel grup kavramı cebirsel topolojinin en önemli kavramlarından biridir. Bir uzayın temel grubunun belirlenebilmesi ile bu uzaydaki kapalı yolların özellikleri arasında önemli bir bağlantı söz konusudur. Bu nedenle temel grup ile homotopi kavramı ayrılmaz iki kavramdır. Örneğin; Şekil 1.1’deki gibi düzlemde yer alan α, β ve γ kapalı yolları ele alınsın.



Şekil 1.1: α, β ve γ kapalı yollarının gösterimi

α, β ve γ kapalı yolları ilk bakışta benzer gibi görünse de incelendiğinde şu farklılıklar görülür: α kapalı yolu tamamen düzlemin içinde kalmaktadır ve yine bu düzlemde bir noktaya büzülebilir ve *“α kapalı yolu bir noktaya (sabit dönüşüme) homotopiktir”* denir. Diğer yandan β ve γ kapalı yolları düzleme ait olmayan bir kümeyi kapsamaktadır. Bu nedenle sadece birisi diğerine dönüştürülebilir. Ancak β ve γ kapalı yolları, α kapalı yoluna dönüştürülemez. Bu nedenle β ve γ kapalı yolları, α kapalı yoluna homotopik olamaz. Bu örnekten yola çıkılarak şu söylenebilir: Bir uzaydaki yollar, denklik sınıflarına ayrılabilir ve bu denklik sınıfları üzerinde çalışmalar yapılabilir. Bu denklik sınıfları da homotopi yardımıyla belirlenir.

Homotopik uzaklık, Macias-Virgos and Mosquera-Lois tarafından 2021 yılında ilk kez tanıtılmış olup [8], üzerinde hala yeni çalışmalar yapılan bir kavramdır (X ve Y

topolojik uzaylar olmak üzere f, g: X → Y sürekli dönüşümleri arasındaki homotopik uzaklık D(f, g) ile gösterilir).

Homotopik uzaklığın, Lusternik-Schnirelmann kategorisi ve topolojik karmaşıklık ile arasındaki bağlantı [8] numaralı kaynakta verilmiştir. Bunun sonucu olarak homotopik uzaklığın, Lusternik-Schnirelmann kategorisi ve topolojik karmaşıklığın genelleştirilmesi olduğu elde edilmiştir.

Homotopik uzaklığın bileşke altında nasıl değiştiğini gösteren teoremler [8] numaralı kaynakta verilmiştir. Bileşkenin homotopik uzaklığa etkisi sayesinde, homotopik uzaklığın özel durumları olan Lusternik-Schnirelmann kategorisi ve topolojik karmaşıklık ile ilgili teoremler daha kolay ispatlanabilmektedir.

Aynı zamanda bir homotopi değişmezi olan homotopik uzaklığın bir diğer özelliği de X normal uzay alındığında f, g, h: X → Y sürekli dönüşümleri için homotopik uzaklığın D(f, h) ≤ D(f, g) + D(g, h) eşitsizliğini (üçgen eşitsizliği) sağladığıdır [8]. Homotopik uzaklığın aşağıdaki üç özelliği, homotopik uzaklığın bir genişletilmiş pseudometrik olarak görülmesine izin vermiştir [14]:

1) D(f, g) = D(g, f),

2) D(f, g) = 0 ise f ≃ g,

3) D(f, h) ≤ D(f, g) + D(g, h).

Diğer taraftan normal uzay yerine sonlu (finite) topolojik uzay alındığında homotopik uzaklığın üçgen eşitsizliğini sağlamadığı [8] numaralı kaynakta gösterilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde; ilerleyen bölümlerdeki kavramların anlaşılmasına yardımcı olan temel kavramlar tanıtılmıştır. Bu bölümdeki bilgiler [1], [2] ve [3] numaralı kaynaklardan alınmıştır.

Tanım 2.1: X boştan farklı bir küme olmak üzere $\tau \subseteq P(X)$, X kümesinin bazı alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer τ,

T1) $\emptyset, X \in \tau$,

T2) $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \tau$ için $A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \in \tau$,

T3) Λ herhangi bir indis kümesi ve her $\alpha \in \Lambda$ için $A_\alpha \in \tau$ olmak üzere

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \in \tau$$

şartlarını sağlıyorsa τ ailesine X kümesi üzerinde bir *topoloji*, (X,τ) ikilisine *topolojik uzay* denir. τ ailesinin her bir elemanına τ topolojisine göre *açıktır* denir.

$K \subseteq X$ olmak üzere, $X \setminus K \in \tau$ ise K kümesine τ topolojisine göre *kapalıdır* denir.

Tanım 2.2: X boştan farklı bir küme olsun.

$$\tau = \{\emptyset, X\}$$

ailesi X üzerinde bir topolojidir ve X topolojik uzayına *indiskret topolojik uzay*, τ topolojisine de *indiskret topoloji* denir. Ayrıca

$$\tau = \{A \mid A \subseteq X\}$$

ailesi X üzerinde bir topolojidir ve X topolojik uzayına da *diskret topolojik uzay*, τ topolojisine de *diskret topoloji* denir.

Tanım 2.3: Eğer boştan farklı ayrık $K_1, K_2 \subset X$ kapalı kümeleri için

$$K_1 \subseteq U, K_2 \subseteq V \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

olacak şekilde $U, V \in \tau$ varsa X uzayına *normal uzay* denir.

Tanım 2.4: X topolojik uzay olmak üzere $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, X uzayının alt kümelerinin bir ailesi olsun. Bu durumda

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = X$$

ise $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ailesine X uzayının bir *örtüsü* denir. $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ailesi X uzayının bir örtüsü olmak üzere her $\alpha \in \Lambda$ için A_α alt kümeleri X uzayının açık alt kümeleri ise $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ailesine X uzayının bir *açık örtüsü* denir.

Tanım 2.5: X ve Y iki topolojik uzay olmak üzere f: X → Y sürekli dönüşümü bire-bir ve örten, f dönüşümünün tersi f^{-1} de sürekli olsun. Bu durumda f dönüşümüne *homeomorfizma,* X ve Y uzaylarına *homeomorf uzaylar* denir ve X ≈ Y ile gösterilir.

Lemma 2.6: (Pasting Lemma) X ve Y topolojik uzayları verilsin. A ve B, X uzayının kapalı alt kümeleri ve X = A ∪ B olsun. f: A → Y ve g: B → Y sürekli dönüşümleri verilsin. Eğer her x ∈ A ∩ B için f(x) = g(x) ise bu durumda

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in A \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan h: X → Y dönüşümü süreklidir.

Tanım 2.7: X bir topolojik uzay olsun. a, b ∈ X için

$$\alpha(0) = a \text{ ve } \alpha(1) = b$$

şartlarını sağlayan α: [0,1] → X sürekli dönüşümüne X uzayında a noktasından b noktasına bir *yol* denir.

$\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$ şeklinde tanımlanan $\bar{\alpha}$: [0,1] → X dönüşümü b noktasından a noktasına bir yoldur.

Tanım 2.8: X bir topolojik uzay olsun. Her a, b ∈ X nokta ikilisi için a ve b arasında bir yol tanımlanabiliyorsa X uzayına *yol bağlantılı topolojik uzay* denir.

Tanım 2.9: G boş olmayan bir küme olmak üzere G üzerinde bir ⊙ işlemi alınsın. Eğer (G, ⊙) aşağıdaki şartları sağlıyorsa (G,⊙) ikilisine *grup* denir.

i) Her a, b, c ∈ G için (a ⊙ b) ⊙ c = a ⊙ (b ⊙ c) sağlanır (birleşme),
ii) Öyle bir e ∈ G için a ⊙ e = e ⊙ a = a şartı her a ∈ G için sağlanır (birim eleman),
iii) Her a ∈ G için a ⊙ t = t ⊙ a = e olacak şekilde bir t ∈ G vardır (ters eleman)

Tanım 2.10: (G, ⊙) ve (G', ⊗) iki grup olmak üzere Φ: G → G' bir dönüşüm olsun. Eğer her a, b ∈ G için

$$\Phi(a \odot b) = \Phi(a) \otimes \Phi(b)$$

şartı sağlanıyorsa Φ dönüşümüne *grup homomorfizması*, Φ bire-bir ve örten homomorfizma ise *grup izomorfizması* denir. Φ grup izomorfizması ise G ve G' *izomorftur* denir ve $G \cong G'$ ile gösterilir.

3. HOMOTOPİ VE TEMEL GRUPLAR

Bu bölümde homotopik uzaklığı tanımlamak için gerekli olan homotopi kavramı verilmektedir. Birinci kısmında homotopi kavramından, ikinci kısmında ise temel gruplardan bahsedilecektir. Aksi belirtilmediği takdirde, tez boyunca alınan tüm kümeler üzerinde bir topoloji ile verilmiştir. Bu bölümdeki bilgiler [1], [2], [4], [5], [6] ve [7] numaralı kaynaklardan alınmıştır.

3.1. Homotopi

Tanım 3.1: f, g: $X \to Y$ sürekli dönüşümleri verilsin. Her $x \in X$ için

$$H(x,0) = f(x) \text{ ve } H(x,1) = g(x)$$

şartlarını sağlayan sürekli bir

$$H: X \times [0,1] \to Y$$

sürekli dönüşümü var ise H dönüşümüne f ve g dönüşümleri arasında bir *homotopi,* f ve g dönüşümlerine *homotopik dönüşümler* denir ve $f \backsimeq g$ ile gösterilir.

Tanım 3.2: f: $X \to Y$ bir sürekli dönüşüm olsun. Eğer f sabit bir dönüşüme homotopik ise f dönüşümüne *sıfır-homotop (null-homotop)* denir.

Örnek 3.3: f, g: $[0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1+x^2(x-2)^2$ ve $g(x) = 1$ olsun.

$$H: [0,2] \times [0,1] \to \mathbb{R},\ H(x,t) = (1-t).[1+x^2(x-2)^2] + t.1$$

dönüşümü süreklidir ve

$$H(x,0) = f(x) \text{ ve } H(x,1) = g(x)$$

şartlarını sağlar. Dolayısıyla H, f ve g dönüşümleri arasında bir homotopidir.

Tanım 3.4: α, β: $[0,1] \to X$, başlangıç noktaları $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ ve bitiş noktaları $\alpha(1) = \beta(1) = x_1$ olan iki yol olsun. $t, s \in [0,1]$ için

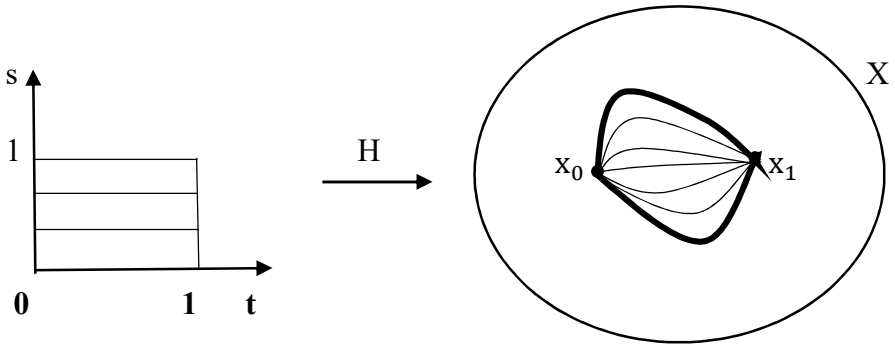
$$H(t,0) = \alpha(t) \text{ ve } H(t,1) = \beta(t)$$

$$H(0,s) = x_0 \text{ ve } H(1,s) = x_1$$

şartlarını sağlayan sürekli bir

$$H: [0,1] \times [0,1] \to X$$

dönüşümü var ise α ve β dönüşümlerine *yol homotopik dönüşümler* denir ve $\alpha \backsimeq_p \beta$ ile gösterilir.



Şekil 3.1: H dönüşümünün gösterimi

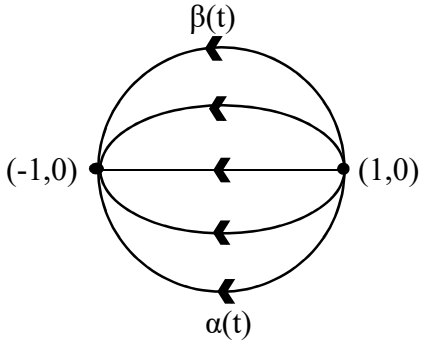
Örnek 3.5: α, β: [0,1] → $\mathbb{R}^2$ olmak üzere α(t) = (cosπt,-sinπt) ve β(t) = (cosπt,sinπt) yolları sırasıyla birim çemberin alt ve üst yarısını çizer. α ve β yolları arasındaki homotopi dönüşümü

$$H: [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ H(t,s) = (\cos\pi t, (2s-1).\sin\pi t)$$

ile tanımlansın. H dönüşümü süreklidir ve

$$H(t,0) = \alpha(t) \text{ ve } H(t,1) = \beta(t)$$

şartları sağlanır. α ve β yollarının başlangıç ve bitiş noktaları sırasıyla H(0,s) = (1,0) ve H(1,s) = (-1,0).



Şekil 3.2: α ve β yollarının birim çemberin alt ve üst yarısını çizimi

Lemma 3.6: Homotopi bağıntısı ve yol homotopi bağıntısı denklik bağıntısıdır.

α yolunun yol homotopi denklik sınıfı [α] ile gösterilir.

İspat: İlk önce ≃ homotopi bağıntısının denklik bağıntısı özelliklerini sağladığı gösterilecektir:

f, g, h: X → Y sürekli dönüşümler olsun.

i) $\backsimeq$ bağıntısı yansımalıdır: $f \backsimeq f$.

H: $X \times [0,1] \rightarrow Y$ dönüşümü $H(x,s) = f(x)$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda H süreklidir ve

$$H(x,0) = f(x) \text{ ve } H(x,1) = f(x)$$

şartlarını sağladığı için $f \backsimeq f$ olur.

ii) $\backsimeq$ bağıntısı simetriktir: $f \backsimeq g \Rightarrow g \backsimeq f$.

$f \backsimeq g$ olsun. Bu durumda

$$H(x,0) = f(x) \text{ ve } H(x,1) = g(x)$$

şartlarını sağlayan $H: X \times [0,1] \rightarrow Y$ sürekli dönüşümü vardır.

$G(x,s) = H(x,1-s)$ şartını sağlayan $G: X \times [0,1] \rightarrow Y$ dönüşümü tanımlansın. H sürekli olduğundan G de süreklidir. Diğer taraftan

$$G(x,0) = H(x,1) = g(x) \text{ ve } G(x,1) = H(x,0) = f(x)$$

şartları da sağlandığı için $g \backsimeq f$ olur.

iii) $\backsimeq$ bağıntısı geçişmelidir: $f \backsimeq g$ ve $g \backsimeq h \Rightarrow f \backsimeq h$.

$f \backsimeq g$ ve $g \backsimeq h$ olsun. Bu durumda

$$H(x,0) = f(x),\ H(x,1) = g(x)$$

şartını sağlayan $H: X \times [0,1] \rightarrow Y$ sürekli dönüşümü ve

$$G(x,0) = g(x),\ G(x,1) = h(x)$$

şartını sağlayan $G: X \times [0,1] \rightarrow Y$ sürekli dönüşümü vardır.

$$K(x,s) = \begin{cases} H(x,2s), & s \in \left[0,\frac{1}{2}\right] \\ G(x,2s-1), & s \in \left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases}$$

olacak şekilde $K: X \times [0,1] \rightarrow Y$ dönüşümü tanımlansın. G ve H dönüşümleri sürekli ve

$$H(x,2.(\tfrac{1}{2})) = H(x,1) = g(x) = G(x,0) = G(x,2.(\tfrac{1}{2}) - 1)$$

olduğu için K dönüşümü Pasting Lemma'dan dolayı süreklidir. Ayrıca

$$K(x,0) = H(x,0) = f(x),\ K(x,1) = G(x,1) = h(x)$$

şartları da sağlandığı için $f \backsimeq h$ olur.

Şimdi de $\backsimeq_p$ yol homotopi bağıntısının denklik bağıntısı özelliklerini sağladığı gösterilecektir:

$\alpha, \beta, \gamma: [0,1] \to X$ yolları olsun ve $\alpha(0) = \beta(0) = \gamma(0) = x_0$ ve $\alpha(1) = \beta(1) = \gamma(1) = x_1$ şartları sağlansın.

i) $\backsimeq_p$ bağıntısı yansımalıdır: $\alpha \backsimeq_p \alpha$.

$H: [0,1] \times [0,1] \to X$ dönüşümü $H(t,s) = \alpha(t)$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda H süreklidir ve

$$H(0,s) = \alpha(0) = x_0,\ H(1,s) = \alpha(1) = x_1,\ H(t,0) = \alpha(t) \text{ ve } H(t,1) = \alpha(t)$$

şartlarını sağladığı için $\alpha \backsimeq_p \alpha$.

ii) $\backsimeq_p$ bağıntısı simetriktir: $\alpha \backsimeq_p \beta \Rightarrow \beta \backsimeq_p \alpha$.

$\alpha \backsimeq_p \beta$ olsun. Bu durumda

$$H(0,s) = x_0,\ H(1,s) = x_1,\ H(t,0) = \alpha(t) \text{ ve } H(t,1) = \beta(t)$$

şartlarını sağlayan $H: [0,1] \times [0,1] \to X$ sürekli dönüşümü vardır.

$$G(t,s) = H(t,1-s)$$

şartını sağlayan $G: [0,1] \times [0,1] \to X$ dönüşümü tanımlansın. H sürekli olduğundan G süreklidir. Diğer taraftan

$$G(t,0) = H(t,1) = \beta(t) \text{ ve } G(t,1) = H(t,0) = \alpha(t),$$
$$G(0,s) = H(0,1-s) = x_0 \text{ ve } G(1,s) = H(1,1-s) = x_1$$

şartları da sağlandığı için $\beta \backsimeq_p \alpha$ olur.

iii) $\backsimeq_p$ bağıntısı geçişmelidir: $\alpha \backsimeq_p \beta$ ve $\beta \backsimeq_p \gamma \Rightarrow \alpha \backsimeq_p \gamma$.

$\alpha \backsimeq_p \beta$ ve $\beta \backsimeq_p \gamma$ olsun. Bu durumda sırasıyla

$$H(t,0) = \alpha(t),\ H(t,1) = \beta(t),\ H(0,s) = x_0 \text{ ve } H(1,s) = x_1$$

ve

$$G(t,0) = \beta(t),\ G(t,1) = \gamma(t),\ G(0,s) = x_0 \text{ ve } G(1,s) = x_1$$

şartlarını sağlayan H: [0,1] × [0,1] → X ve G: [0,1] × [0,1] → X sürekli dönüşümleri vardır.

$$K(t,s) = \begin{cases} H(t,2s), & s \in \left[0,\frac{1}{2}\right] \\ G(t,2s-1), & s \in \left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases}$$

olacak şekilde K: [0,1] × [0,1] → X dönüşümü tanımlansın. G ve H dönüşümleri sürekli olduğu için K dönüşümü Pasting Lemma'dan dolayı süreklidir. Ayrıca

$$K(0,s) = x_0,\ K(1,s) = x_1,$$
$$K(t,0) = H(t,0) = \alpha(t),\ K(t,1) = G(t,1) = \gamma(t) \text{ ve}$$
$$K(t,\tfrac{1}{2}) = H(t,1) = \beta(t) = G(t,0) = G(1,\ 2.(\tfrac{1}{2}) - 1)$$

şartları da sağlandığı için $\alpha \backsimeq_p \gamma$ olur.

Önerme 3.7: f, g: X → Y ve f ',g': Y → Z dönüşümleri için f ≃ g ve f ' ≃ g' ise f ' o f ≃ g' o g.

İspat: f ≃ g ve f ' ≃ g' olsun. Bu durumda sırasıyla

$$H(x,0) = f(x) \text{ ve } H(x,1) = g(x)$$

ve

$$G(y,0) = f'(y) \text{ ve } G(y,1) = g'(y)$$

şartlarını sağlayan H: X × [0,1] → Y ve G: Y × [0,1] → Z sürekli dönüşümleri vardır.

$$K(x,s) = G(H(x,s),s)$$

olacak şekilde K: X × [0,1] → Z sürekli dönüşümü tanımlansın.

$$K(x,1) = G(H(x,1),1) = G(g(x),1) = g'(g(x)) = (g' \text{ o } g)(x)$$

şartı sağlanır. Benzer şekilde K(x,0)=(f 'of)(x) olduğu görülür. O halde f ' o f ≃ g' o g.

Tanım 3.8: X ve Y topolojik uzaylar olmak üzere, f: X → Y ve g: Y → X sürekli dönüşümler olsun. Eğer f o g ≃ id_Y şartı sağlanıyorsa g dönüşümüne f dönüşümünün *sağ homotopi tersi,* eğer g o f ≃ id_X şartı sağlanıyorsa g dönüşümüne f dönüşümünün *sol homotopi tersi* denir.

Tanım 3.9: X ve Y topolojik uzayları verilsin. Eğer f o g $\backsimeq id_Y$ ve g o f $\backsimeq id_X$ olacak şekilde f: X → Y ve g: Y → X sürekli dönüşümleri varsa X ve Y topolojik uzayları *aynı homotopi tipine sahiptir* denir ve X $\backsimeq$ Y ile gösterilir.

Örnek 3.10: (0,1) ve {0} topolojik uzayları verilsin.

$$f: (0,1) \to \{0\},\ f(x) = 0 \text{ ve } g: \{0\} \to (0,1),\ g(0) = 1/2$$

şeklinde tanımlanmış f ve g dönüşümleri alınsın.

$$K: \{0\} \times [0,1] \to \{0\},\ K(x,s) = 0$$

sürekli dönüşümü tanımlansın.

$$K(x,0) = 0 = (f \text{ o } g)(0) \text{ ve } K(x,1) = 0 = id_{\{0\}}$$

olduğundan f o g $\backsimeq id_{\{0\}}$.

$$H: (0,1) \times [0,1] \to (0,1),\ H(x,s) = (1-s+2sx)/2$$

sürekli dönüşümü tanımlansın.

$$H(x,0) = (g \text{ o } f)(x) = 1/2 \text{ ve } H(x,1) = x = id_{(0,1)}$$

olduğundan g o f $\backsimeq id_{(0,1)}$. Dolayısıyla (0,1) $\backsimeq$ {0} elde edilir.

Tanım 3.11: Aynı homotopi tipine sahip uzaylarda korunan özelliklere *homotopi değişmezi (homotopy invariant)* denir.

3.2. Temel Gruplar

Tanım 3.12: X topolojik uzay olmak üzere $x_0 \in X$ olsun. Başlangıç ve bitiş noktası x_0 noktası olan yola kapalı yol (kapalı eğri / loop) ve x_0 noktasına da yolun *baz noktası (basepoint)* denir.

Tanım 3.13: X topolojik uzayında α, x_0 noktasından x_1 noktasına bir yol ve β de x_1 noktasından x_2 noktasına bir yol olsun.

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \beta(2t-1), & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

olacak şekilde α ve β yollarını uç uca ekleyen bir $\alpha * \beta$ dönüşümü tanımlansın. $\alpha * \beta$ dönüşümü X uzayında x_0 noktasından x_2 noktasına bir yoldur ve Pasting Lemma'dan dolayı süreklidir.

Tanım 3.14: X topolojik uzay olsun. $x_0 \in X$ olmak üzere her $t \in [0,1]$ için $e_{x_0}(t) = x_0$ şeklinde tanımlanan $e_{x_0}: [0,1] \to X$ dönüşümüne *sabit yol* denir.

Teorem 3.15: Yol homotopi denklik sınıfları üzerinde $[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$ olacak şekilde $*$ işlemi tanımlansın. $*$ işlemi iyi tanımlıdır ve aşağıdaki özellikleri sağlar. (Bu özellikleri sağlayan yapıya *grupoid* denir.)

x_0 ve x_1 noktalarındaki sabit yollar sırasıyla e_{x_0} ve e_{x_1} olsun. $\alpha: [0,1] \to X$ yolu için $\overline{\alpha}: [0,1] \to X$ dönüşümü $\overline{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$ şeklinde tanımlansın.

1) $([\alpha] * [\beta]) * [\gamma] = [\alpha] * ([\beta] * [\gamma])$ (birleşme),

2) $[\alpha] = [\alpha] * [e_{x_1}]$, $[e_{x_0}] * [\alpha] = [\alpha]$ (sağ/sol birim eleman),

3) $[e_{x_0}] = [\alpha] * [\overline{\alpha}]$, $[\overline{\alpha}] * [\alpha] = [e_{x_1}]$ (sağ/sol ters eleman).

İspat: İlk önce $*$ işleminin iyi tanımlı olduğu gösterilecektir. $[\alpha] = [\beta]$ ve $[\alpha_1] = [\beta_1]$ olsun. Bu durumda $\alpha \backsimeq_p \beta$ ve $\alpha_1 \backsimeq_p \beta_1$ demektir. O halde

$$H(t,0) = \alpha(t),\ H(t,1) = \beta(t),\ H(0,s) = x_0 \text{ ve } H(1,s) = x_1$$

olacak şekilde $H: [0,1] \times [0,1] \to X$ sürekli dönüşümü vardır ve

$$G(t,0) = \alpha_1(t),\ G(t,1) = \beta(t),\ G(0,s) = x_1 \text{ ve } G(1,s) = x_2$$

olacak şekilde $G: [0,1] \times [0,1] \to X$ sürekli dönüşümü vardır.

$$K(t,s) = \begin{cases} H(2t,s), & t \in \left[0,\frac{1}{2}\right] \\ G(2t-1,s), & t \in \left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases}$$

olacak şekilde $K: [0,1] \times [0,1] \to X$ dönüşümü tanımlansın. G ve H dönüşümleri sürekli olduğu için Pasting Lemma'dan dolayı K dönüşümü süreklidir.

$$K(t,1) = \begin{cases} H(2t,1), & t \in \left[0,\frac{1}{2}\right] \\ G(2t-1,1), & t \in \left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases} = \begin{cases} \beta(2t), & t \in \left[0,\frac{1}{2}\right] \\ \beta_1(2t-1), & t \in \left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases} = (\beta * \beta_1)(t)$$

şartı sağlanır, benzer şekilde $K(t,0) = (\alpha * \alpha_1)(t)$ olduğu görülür. Ayrıca

$$K(0,s) = H(0,s) = x_0 \text{ ve } K(1,s) = G(1,s) = x_2$$

şartları sağlandığı için $\alpha * \alpha_1 \backsimeq \beta * \beta_1$ bulunur. Bu durumda

$$[\alpha * \alpha_1] = [\beta * \beta_1] \Rightarrow [\alpha] * [\alpha_1] = [\beta] * [\beta_1].$$

1) K: [0,1] × [0,1] → X dönüşümü

$$K(t,s) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{4t}{1+s}\right), & t \in \left[0, \frac{1+s}{4}\right] \\ \beta(4t - s - 1), & t \in \left[\frac{1+s}{4}, \frac{2+s}{4}\right] \\ \gamma\left(\frac{4t-s-2}{2-s}\right), & t \in \left[\frac{2+s}{4}, 1\right] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Pasting Lemma'dan dolayı K dönüşümü süreklidir.

$$K(t,1) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \beta(4t-2), & t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ \gamma(4t-3), & t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2t), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ (\beta * \gamma)(2t-1), & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} = \alpha*(\beta* \gamma))(t),$$

şartı sağlanır, benzer şekilde K(t,0) = ((α ∗ β) ∗ γ)(t) olduğu görülür. Ayrıca

$$K(0,s) = \alpha(0) = x_0 \text{ ve } K(1,s) = \gamma(\tfrac{4t-s-2}{2-s}) = \gamma(1) = x_3$$

şartları sağlandığı için $(\alpha * \beta) * \gamma) \backsimeq_p (\alpha * (\beta * \gamma))$ olur. Buradan $([\alpha]*[\beta])*[\gamma] = [\alpha]*([\beta]*[\gamma])$ elde edilir.

2) K: [0,1] × [0,1] → X dönüşümü

$$K(t,s) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{2t}{2-s}\right), & t \in \left[0, \frac{2-s}{2}\right] \\ x_1, & t \in \left[\frac{2-s}{2}, 1\right] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Pasting Lemma'dan dolayı K dönüşümü süreklidir. Ayrıca

$$K(t,0) = \alpha(t),\ K(t,1) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ x_1, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} = (\alpha * e_{x_1})(t),$$

$$K(0,s) = x_0 \text{ ve } K(1,s) = x_1$$

şartları sağlandığı için $\alpha \backsimeq_p (\alpha * e_{x_1})$ olur. Buradan $[\alpha] = [\alpha] * [e_{x_1}]$ elde edilir. Benzer şekilde $[e_{x_0}] * [\alpha] \backsimeq_p [\alpha]$ bulunur.

3) K: [0,1] × [0,1] → X dönüşümü

$$K(t,s) = \begin{cases} \alpha(2ts), & t \in \left[0,\frac{1}{2}\right] \\ \alpha(2s(1-t)), & t \in \left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Pasting Lemma'dan dolayı K dönüşümü süreklidir.

$$K(t,0) = \alpha(0) = x_0 = e_{x_0}(t),$$

$$K(t,1) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \in \left[0,\frac{1}{2}\right] \\ \alpha(2(1-t)), & t \in \left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2t), & t \in \left[0,\frac{1}{2}\right] \\ \bar{\alpha}(2t-1), & t \in \left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases} = (\alpha * \bar{\alpha})(t),$$

$$K(0,s) = x_0 \text{ ve } K(1,s) = x_0$$

şartları sağlandığı için $e_{x_0} \backsimeq_p (\alpha * \bar{\alpha})$ olur. Buradan $[e_{x_0}] = [\alpha] * [\bar{\alpha}]$ elde edilir. Benzer şekilde $[\bar{\alpha}] * [\alpha] = [e_{x_1}]$ bulunur.

Tanım 3.16: X topolojik uzayındaki x_0 baz noktalı kapalı yolların yol homotopi sınıflarının kümesi $*$ işlemi altında grup yapısı oluşturur. Bu gruba X uzayının *temel grubu (1. homotopi grubu)* denir ve $\pi_1(X,x_0)$ ile gösterilir.

Örnek 3.17: $x_0 \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\pi_1(\mathbb{R}^n,x_0)$ aşikar gruptur. α: [0,1] → $\mathbb{R}^n$, herhangi bir $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ yolu alınsın.

$$H(t,s) = s.e_{x_0}(t) + (1\text{-}s).\alpha(t)$$

olacak şekilde H: [0,1] × [0,1] → $\mathbb{R}^n$ sürekli dönüşümü tanımlansın.

$$H(t,0) = \alpha(t),\ H(t,1) = e_{x_0}(t),\ H(0,s) = x_0 \text{ ve } H(1,s) = x_0$$

olduğu için $\alpha \backsimeq_p e_{x_0}$ olur. Böylece $[\alpha] = [e_{x_0}]$ elde edilir. Bir başka deyişle $\pi_1(\mathbb{R}^n,x_0)$ temel grubu $[e_{x_0}]$ birim elemanından oluşan aşikar gruptur. $\pi_1(\mathbb{R}^n,x_0) = \{[e_{x_0}]\}$. Kolaylık olması açısından aşikar grubu 0 ile gösterilir ve $\pi_1(\mathbb{R}^n,x_0) = 0$ şeklinde yazılır.

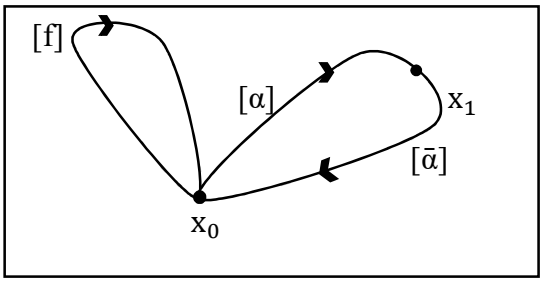
Teorem 3.18: α, X topolojik uzayında başlangıç noktası x_0 ve bitiş noktası x_1 olan yol olsun.

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(1\text{-}t)$$

olacak şekilde $\bar{\alpha}$: [0,1] → X dönüşümü tanımlansın. Her $[f] \in \pi_1(X,x_0)$ için

$$\tilde{\alpha}([f]) = [\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]$$

şeklinde tanımlanan $\tilde{\alpha}: \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,x_1)$ dönüşümü grup izomorfizmasıdır.



Şekil 3.3: f, α ve $\bar{\alpha}$ kapalı yollarının denklik sınıflarının gösterimi

İspat:

i) $\tilde{\alpha}$ dönüşümünün iyi tanımlı olduğu gösterilecektir:

$[f], [g] \in \pi_1(X,x_0)$ için $[f] = [g]$ olsun. Böylece $f \backsimeq_p g$ olur.

$\Rightarrow \bar{\alpha} * f \backsimeq_p \bar{\alpha} * g$

$\Rightarrow \bar{\alpha} * f * \alpha \backsimeq_p \bar{\alpha} * g * \alpha$

$\Rightarrow [\bar{\alpha} * f * \alpha] = [\bar{\alpha} * g * \alpha]$

$\Rightarrow [\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha] = [\bar{\alpha}] * [g] * [\alpha]$

$\Rightarrow \tilde{\alpha}([f]) \backsimeq_p \tilde{\alpha}([g])$.

ii) $\tilde{\alpha}$ dönüşümünün grup homomorfizması olduğu gösterilecektir:

f ve g, x_0 baz noktalı kapalı yollar olsun. $[f], [g] \in \pi_1(X,x_0)$ için

$$\tilde{\alpha}([f]) * \tilde{\alpha}([g]) = ([\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]) * ([\bar{\alpha}] * [g] * [\alpha])$$

$$= [\bar{\alpha}] * [f] * [g] * [\alpha]$$

$$= \tilde{\alpha}([f] * [g])$$

iii) $\tilde{\alpha}$ dönüşümünün izomorfizma olduğu gösterilecektir:

$\beta = \bar{\alpha}$ olsun. g, x_1 baz noktalı kapalı bir yol olmak üzere

$$\tilde{\beta}([g]) = [\bar{\beta}] * [g] * [\beta] = [\alpha] * [g] * [\bar{\alpha}]$$

olacak şekilde $\tilde{\beta}: \pi_1(X,x_1) \to \pi_1(X,x_0)$ dönüşümü tanımlansın.

$\tilde{\beta}$, $\tilde{\alpha}$ dönüşümünün sağ tersi midir?

$[g] \in \pi_1(X,x_1)$ alınsın.

$\tilde{\alpha}(\tilde{\beta}[g]) = [\bar{\alpha}] * ([\bar{\beta}] * [g] * [\beta]) * [\alpha]$

$= [\bar{\alpha}] * ([\alpha] * [g] * [\bar{\alpha}]) * [\alpha]$

$= ([\bar{\alpha}] * [\alpha]) * [g] * ([\bar{\alpha}] * [\alpha])$

$= [e_{x_1}] * [g] * [e_{x_1}]$

$= [g] * [e_{x_1}]$

$= [g]$.

$\tilde{\beta}$, $\tilde{\alpha}$ dönüşümünün sol tersi midir?

$[h] \in \pi_1(X,x_0)$ alınsın

$\tilde{\beta}(\tilde{\alpha}[h]) = [\bar{\beta}] * ([\bar{\alpha}] * [h] * [\alpha]) * [\beta]$

$= [\bar{\beta}] * ([\beta] * [h] * [\bar{\beta}]) * [\beta]$

$= ([\bar{\beta}] * [\beta]) * [h] * ([\bar{\beta}] * [\beta])$

$= [e_{x_0}] * [h] * [e_{x_0}]$

$= [h] * [e_{x_0}]$

$= [h]$.

O halde $\tilde{\alpha}$ izomorfizmadır.

Sonuç 3.19: X yol bağlantılı uzay olmak üzere $x_0, x_1 \in X$ olsun. Bu durumda $\pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(X,x_1)$ olur. Temel grup, noktadan bağımsız olduğu için $\pi_1(X,x_0)$ yerine $\pi_1(X)$ ile gösterilebilir.

Tanım 3.20: X yol bağlantılı uzay olsun. Eğer X uzayının temel grubu $\pi_1(X,x_0) = 0$ (aşikar grup) ise X uzayına *basit bağlantılı uzay* denir.

Örnek 3.21: $\mathbb{R}^n$ yol bağlantılı uzay ve temel grubu $\pi_1(\mathbb{R}^n,x_0) = 0$ olduğu için basit bağlantılıdır.

Tanım 3.22: Her x ∈ X için, $id_X = x$ ile tanımlanan id_X: X → X birim dönüşümü, $c(x) = x_0$ ile tanımlanan c: X → X sabit dönüşümüne homotop ise X uzayına *büzülebilir uzay* denir.

Örnek 3.23: [a,b] kapalı aralığında keyfi bir c_0 ∈ [a,b] için c: [a,b] → [a,b]: x ↦ c(x) = c_0 sabit dönüşümü alınsın.

$$F(x,s) = s.c(x) + (1-s).\ id_X(x)$$

olacak şekilde bir F: [a,b] × [0,1] → [a,b] sürekli dönüşümü tanımlansın.

$$F(x,0) = id_X(x),\ F(x,1) = c(x)$$

şartları sağlandığı için [a,b] uzayı büzülebilirdir.

Teorem 3.24: Büzülebilir uzay basit bağlantılıdır.

İspat: X büzülebilir uzay olsun. x_0 ∈ X alınsın.

$$F(x,0) = x \text{ ve } F(x,1) = x_0$$

olacak şekilde F: X × [0,1] → X sürekli dönüşümü tanımlansın.

$$\alpha(s) = F(x,s), \text{ her } s \in [0,1]$$

şeklinde tanımlanan α: [0,1] → X dönüşümü x noktasından x_0 noktasına bir yoldur. Dolayısıyla X uzayı yol bağlantılıdır.

$$H(t,s) = F(\beta(t),s)$$

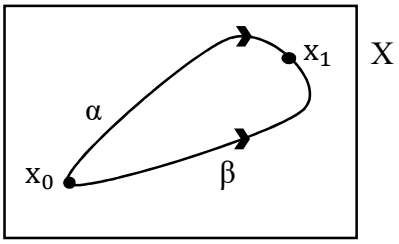
olacak şekilde H: X × [0,1] → X dönüşümü tanımlansın. Herhangi bir [β] ∈ $\pi_1(X,x_0)$ için,

$$H(t,0) = F(\beta(t),0) = \beta(t) \text{ ve } H(t,1) = F(\beta(t),1) = x_0$$

şartları sağlandığından $\pi_1(X,x_0) = 0$ olur. Dolayısıyla X uzayı basit bağlantılıdır.

Lemma 3.25: X basit bağlantılı uzayında başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan iki yol, yol homotopiktir.

İspat:



Şekil 3.4: α ve β yollarının gösterimi

α ve β, başlangıç noktası x_0 ve bitiş noktası x_1 olan iki yol olsun. $\bar{\beta}$: [0,1] → X, $\bar{\beta}(t) = \beta(1-t)$ olmak üzere $\alpha * \bar{\beta}$, başlangıç ve bitiş noktası x_0 olan bir kapalı yoldur. X basit bağlantılı olduğu için $\pi_1(X,x_0) = 0$ olur. Bu durumda $\alpha * \bar{\beta} \backsimeq_p e_{x_0}$ elde edilir. Buradan

$$\alpha = \alpha * \bar{\beta} * \beta \backsimeq_p e_{x_0} * \beta \backsimeq_p \beta \Rightarrow \alpha \backsimeq_p \beta$$

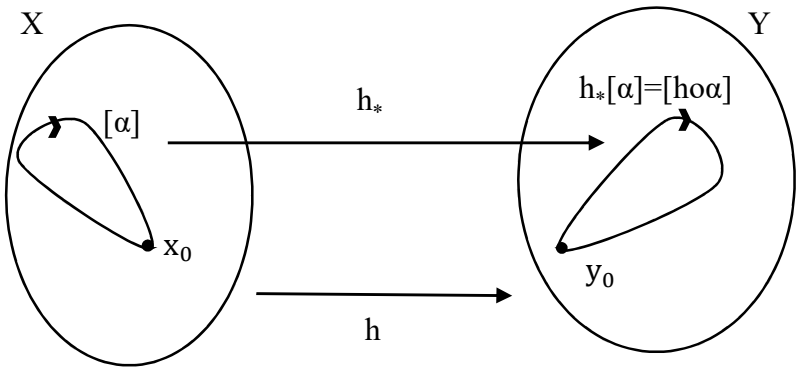
bulunur.

Açıklama: X ve Y topolojik uzay olsun. h: $(X,x_0) \rightarrow (Y,y_0)$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa süreklidir: $x_0 \in X$ ve $y_0 \in Y$ için $h(x_0) = y_0$ olacak şekilde h: X → Y dönüşümü süreklidir.

Tanım 3.26: h: $(X,x_0) \rightarrow (Y,y_0)$ sürekli dönüşümü olsun. X uzayında başlangıç ve bitiş noktası x_0 noktası olan α kapalı yolunu, Y uzayında başlangıç ve bitiş noktası y_0 olan kapalı bir yola dönüştürmek için

$$h_*: \pi_1(X,x_0) \rightarrow \pi_1(Y,y_0)$$
$$h_*([\alpha]) = [h \circ \alpha]$$

dönüşümü tanımlansın. h_* dönüşümüne *h tarafından indirgenmiş (induced) homomorfizma* denir.



Şekil 3.5: h_* ve h dönüşümlerinin gösterimi

1) h_* dönüşümü iyi tanımlıdır.

   $[\alpha] = [\beta]$ alınsın. Bu durumda

   $\alpha \backsimeq_p \beta \Rightarrow h \circ \alpha \backsimeq_p h \circ \beta$

   $\Rightarrow [h \circ \alpha] = [h \circ \beta]$

   $\Rightarrow h_*([\alpha]) = h_*([\beta])$.

2) h_* dönüşümü homomorfizmadır.

$$(h \circ (\alpha * \beta))(t) = \begin{cases} h(\alpha(2t)), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ h(\beta(2t-1)), & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} = ((h \circ \alpha) * (h \circ \beta))(s)$$

   olduğundan $h_*([\alpha * \beta]) = h_*([\alpha]) * h_*([\beta])$ olduğu görülür.

Lemma 3.27: i) $h: (X,x_0) \to (Y,y_0)$ ve $k: (Y,y_0) \to (Z,z_0)$ sürekli iki dönüşüm olsun. Bu durumda

$$(k \circ h)_* = k_* \circ h_*.$$

ii) id_X: $(X,x_0) \to (X,x_0)$ birim dönüşüm olmak üzere $(id_X)_*$: $\pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,x_0)$ birim homomorfizmasıdır.

İspat:

i) $(k \circ h)_*([\alpha]) = [(k \circ h) \circ \alpha]$

$= [k \circ (h \circ \alpha)]$

$= k_*([h \circ \alpha])$

$= (k_* \circ h_*)([\alpha])$.

ii) $(id_X)_*([\alpha]) = [id_X \circ \alpha] = [\alpha]$ olduğundan $(id_X)_*$ birim homomorfizmasıdır.

Sonuç 3.28: $h: (X,x_0) \to (Y,y_0)$ dönüşümü homeomorfizma ise h dönüşümünün indirgediği h_*: $\pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$ dönüşümü izomorfizmadır.

İspat: h_* dönüşümünün homomorfizma olduğu Tanım 3.26'dan bilinmektedir. h homeomorfizma ise h sürekli, h dönüşümünün tersi var ve süreklidir. $h^{-1} = k$ olsun:

$(h \circ k)_*$: $\pi_1(Y,y_0) \to \pi_1(Y,y_0)$ ve $(k \circ h)_*$: $\pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,x_0)$

$(h_* \circ k_*)([\alpha]) = (h \circ k)_*([\alpha]) = [h \circ k \circ \alpha] = [id_Y \circ \alpha] = [\alpha] = (id_Y)_*([\alpha])$ ve

$(k_* \circ h_*)([\beta]) = (k \circ h)_*([\beta]) = [k \circ h \circ \beta] = [id_X \circ \beta] = [\beta] = (id_X)_*([\beta])$.

Böylece h_* izomorfizmadır.

4. HOMOTOPİK UZAKLIK

Bu bölümde homotopik uzaklık tanımlanmıştır. Homotopik uzaklığın, Lusternik-Schnirelmann kategorisi ve topolojik karmaşıklık ile arasındaki bağlantısı ve homotopik uzaklığın özellikleri verilmiştir.

Tanım 4.1: [8] f, g: X → Y iki sürekli dönüşüm olsun. *f ve g arasındaki homotopik uzaklık* en küçük n ≥ 0 tamsayısıdır öyle ki $\{U_0, U_1,\ldots, U_n\}$ X uzayının şu özelliğini sağlayan açık örtüsüdür: $f|_{U_i} \backsimeq g|_{U_i}$ (i=0,1,…,n). f ve g arasındaki homotopik uzaklık D(f, g) ile gösterilir. Böyle bir n tamsayısı bulunamazsa D(f, g) = ∞ alınır.

Önerme 4.2: [8] f, g: X → Y iki sürekli dönüşüm olsun. Homotopik uzaklık aşağıdaki şartları sağlar.

i) D(f, g) = D(g, f)

ii) D(f, g) = 0 ancak ve ancak f ve g dönüşümleri homotopiktir.

İspat: i) D(f, g) = n olsun. Bu durumda Tanım 4.1'den X uzayının $\{U_0, U_1,\ldots, U_n\}$ açık örtüsü vardır ki $f|_{U_i} \backsimeq g|_{U_i}$ (i=0,1,…,n) özelliği sağlanır. Homotopi denklik bağıntısı olduğundan dolayı $g|_{U_i} \backsimeq f|_{U_i}$ olur. Dolayısıyla D(g, f) = n.

ii) (⇒): D(f, g) = 0 olsun. Bu durumda Tanım 4.1'den X uzayının bir tane açık örtüsü vardır ki $f|_U \backsimeq g|_U$ özelliğini sağlar. Dolayısıyla U = X. Böylece f ≃ g.

(⇐): Benzer şekilde ispatlanır.

Aşağıdaki önerme homotopik uzaklığın sadece homotopi sınıfına bağlı olduğunu söyler.

Önerme 4.3: [8] f, g, f', g': X → Y sürekli dönüşümleri olsun. Eğer f ≃ f' ve g ≃ g' ise D(f, g) = D(f', g') olur.

İspat: D(f, g) = n alınsın. Bu durumda X uzayının $\{U_0, U_1,\ldots, U_n\}$ açık örtüsü vardır ki $f|_{U_i} \backsimeq g|_{U_i}$ (i=0,1,…,n) olur. Diğer taraftan f ≃ f' ve g ≃ g' olduğundan dolayı

$$f'|_{U_i} \backsimeq f|_{U_i} \backsimeq g|_{U_i} \backsimeq g'|_{U_i}$$

elde edilir. Dolayısıyla D(f', g') = n.

Tanım 4.4: [8] Yol bağlantılı bir X topolojik uzayı için $U \subseteq X$ açık alt kümesi verilsin. Eğer $i: U \hookrightarrow X$ kapsama (inclusion) dönüşümü sıfır-homotopik ise U açık alt kümesi, X uzayının *kategoriseli* denir. *X uzayının Lusternik-Schnirelmann kategorisi* en küçük $n \geq 0$ tamsayısıdır öyle ki X uzayının $\{U_0, U_1, \ldots, U_n\}$ kategorisel açık alt kümelerinin birleşimi X uzayını verir. X uzayının Lusternik-Schnirelmann kategorisi cat(X) ile gösterilir. Eğer böyle bir n tamsayısı bulunamazsa $cat(X) = \infty$ alınır.

Not: Lusternik-Schnirelmann kategorisi, kategori teorisinden farklı olup aralarında sadece isim benzerliği vardır.

Sabit bir $x_0 \in X$ noktası için c_{x_0}, X üzerinde sabit dönüşüm ve id_X, X üzerinde birim dönüşüm olsun. cat(X), id_X ile c_{x_0} dönüşümleri arasındaki homotopik uzaklığa eşittir.

$$cat(X) = D(id_X, c_{x_0}).$$

Önerme 4.5: [8] $i_1, i_2: X \to X \times X$ kapsama dönüşümleri olsun. $x_0 \in X$ sabit olmak üzere $i_1(x) = (x,x_0)$ ve $i_2(x) = (x_0,x)$ ile tanımlansın. Bu durumda

$$cat(X) = D(i_1, i_2).$$

İspat: İlk önce $D(i_1, i_2) \leq cat(X)$ olduğu gösterilecektir. cat(X) = n olsun. Bu durumda $X = U_0 \cup U_1 \cup \ldots \cup U_n$ $(i=0,1,\ldots,n)$ kategorisel örtüsü vardır. Böylece $id_X|_{U_i} \backsimeq c_{x_0}|_{U_i}$. $u_i: U_i \hookrightarrow X$ kapsama dönüşümü olmak üzere $id_X \circ u_i = id_X|_{U_i} \backsimeq c_{x_0} \circ u_i = c_{x_0}|_{U_i}$ olur. Kolaylık olması açısından u_i yerine u kullanılacaktır.

$$i_1 \circ u = (id_X, c_{x_0}) \circ u = (id_X \circ u, c_{x_0} \circ u) \backsimeq (c_{x_0} \circ u, id_X \circ u) = (c_{x_0}, id_X) \circ u = i_2 \circ u$$

Şimdi de $cat(X) \leq D(i_1, i_2)$ olduğu gösterilecektir. $H(x,0) = (x,x_0)$ ve $H(x,1) = (x_0,x)$ olacak şekilde $(i_1)|_{Ui}$ ve $(i_2)|_{Ui}$ arasında bir $H: U \times [0,1] \to X \times X$ homotopisi olduğu varsayılsın. $p_1 \circ H$, H homotopisinin birinci bileşeni olsun. Bu durumda $p_1 \circ H$, $U \subseteq X$ kapsama dönüşümü ile c_{x_0} sabit dönüşümü arasındaki homotopidir.

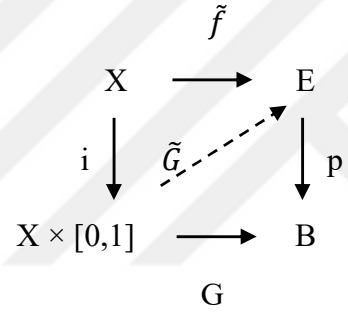
Tanım 4.6: [9] $f: X \to Y$ sürekli dönüşümü verilsin. *f dönüşümünün Lusternik-Schnirelmann kategorisi* en küçük $n \geq 0$ tamsayısıdır öyle ki X uzayının öyle bir

$\{U_0, U_1,\ldots, U_n\}$ açık örtüsü vardır ki $f|_{U_i}$ sıfır-homotopiktir (i=0,1,…,n). f dönüşümünün Lusternik-Schnirelmann kategorisi cat(f) ile gösterilir.

Önerme 4.7: [9] Y yol bağlantılı olsun. f: X → Y dönüşümünün Lusternik-Schnirelmann kategorisi cat(f), f dönüşümü ile c_{x_0} sabit dönüşüm arasındaki homotopik uzaklığa eşittir:

$$cat(f) = D(f, c_{x_0}).$$

Tanım 4.8: [5] E ve B topolojik uzaylar olsun. p: E → B dönüşümü eğer aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa p dönüşümüne *X uzayına göre homotopi yükseltme özelliğine sahiptir* denir: i: X → X × [0,1]: x ↦ (x,0) olmak üzere p o $\tilde{f}$ = G o i şartını sağlayan tüm $\tilde{f}$: X → E ve G: X × [0,1] → B dönüşümleri için aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan bir $\tilde{G}$: X × [0,1] → E dönüşümü vardır.



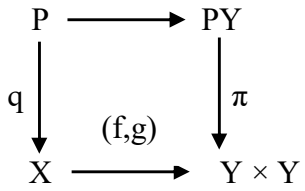
Şekil 4.1: $\tilde{f}$, i, $\tilde{G}$, p ve G dönüşümlerinin diyagramı

Tanım 4.9: [5] E ve B topolojik uzaylar olsun. Eğer p: E → B dönüşümü her X uzayına göre homotopi yükseltme özelliğine sahipse p dönüşümüne *fibrasyon (fibration)* denir.

Tanım 4.10: [8] π: E → B fibrasyonu olsun. *π fibrasyonunun Švarc genus'u* en küçük n ≥ 0 tamsayısıdır öyle ki B uzayının öyle bir $\{V_0, V_1,\ldots, V_n\}$ açık örtüsü vardır ki her bir V_i açık kümeleri için s_i: V_i → E kesmesi (section) vardır (i=0,1,…,n). π fibrasyonunun Švarc genus'u secat(π) ile gösterilir.

Aşağıdaki teorem Švarc genus açısından homotopik uzaklığın bir yorumunu vermektedir.

Teorem 4.11: [8] f, g: X → Y dönüşümleri olsun. PY, Y uzayındaki yolların uzayı olmak üzere π: PY → Y × Y yol fibrasyonun (f,g): X → Y × Y dönüşümü ile geri çekmesi (pull-back) q: P → X olsun.



Şekil 4.2: q, π ve (f,g) dönüşümleri

Bu durumda D(f, g) = secat(q).

İspat: $x \in X$ ve $\gamma \in PY$ olmak üzere $\gamma(0) = f(x)$ ve $\gamma(1) = g(x)$ olacak şekilde $(x,\gamma) \in P$ olsun. q dönüşümü, birinci bileşene izdüşüm dönüşümü olsun. İlk önce $D(f, g) \leq secat(q)$ olduğu gösterilecektir. $i_u: U \hookrightarrow X$ kapsama dönüşümü olmak üzere eğer $q \circ s = id_u$ olacak şekilde bir $s: U \rightarrow P$ kesmesi varsa $s(x) = (x,\gamma_x)$ yazılabilir. Burada γ_x, f(x) noktasından g(x) noktasına yoldur. Böylece $H(x,t) = \gamma_x(t)$ homotopisi U üzerinde f ve g dönüşümlerini homotop kılar.

Şimdi de $secat(q) \leq D(f, g)$ olduğu gösterilecektir. $f|_U \backsimeq g|_U$ olacak şekilde bir U açık kümesi olsun. $f|_U \backsimeq g|_U$ arasındaki homotopi $H: U \times I \rightarrow X$ ile verilsin. Bu durumda $s: X \rightarrow P$ kesmesi $s(x) = (x,H(x,-))$ şeklinde tanımlanabilir.

Tanım 4.12: [8] X yol bağlantılı topolojik uzay ve $\pi: PX \rightarrow X \times X$, $\pi(\gamma) = (\gamma(0),\gamma(1))$ yol fibrasyonu olsun. *X uzayının topolojik karmaşıklığı* en küçük $n \geq 0$ tamsayısıdır öyle ki $X \times X$ uzayının öyle bir $\{U_0, U_1,\ldots, U_n\}$ açık örtüsü vardır ki her bir U_i açık kümeleri için sürekli bir $s_i: U_i \rightarrow PX$ kesmesi vardır (i=0,1,…,n). X uzayının topolojik karmaşıklığı TC(X) ile gösterilir. Eğer böyle bir n tamsayısı bulunamazsa $TC(X) = \infty$ alınır.

Önerme 4.13: [8] X yol bağlantılı bir topolojik uzay olsun. PX, X uzayındaki yolların kümesi olmak üzere $\pi: PX \rightarrow X \times X$ yol fibrasyonu verilsin. X uzayının topolojik karmaşıklığı TC(X), π yol fibrasyonunun secatine eşittir:

$$TC(X) = secat(\pi).$$

Aşağıdaki önerme, Teorem 4.11'in sonucudur:

Sonuç 4.14: [8] p_1, p_2: $X \times X \rightarrow X$ sırasıyla birinci ve ikinci bileşene izdüşüm dönüşümleri olsun. Bu durumda

$$TC(X) = D(p_1, p_2).$$

İspat: Teorem 4.11'in ispatında f = p_1 ve g = p_2 izdüşüm dönüşümleri ve q = π alınırsa önerme ispatlanmış olur.

$$D(p_1, p_2) = secat(\pi) = TC(X).$$

Homotopik uzaklık, Lusternik – Schnirelmann kategorisi ve topolojik karmaşıklığın genelleştirilmesidir.

4.1. Homotopik Uzaklığın Özellikleri

Önerme 4.15: [8] f, g: X → Y ve h: Y → Z sürekli dönüşümleri verilsin. Bu durumda

$$D(h \circ f, h \circ g) \leq D(f, g).$$

İspat: D(f, g) = n olsun. X = $U_0 \cup U_1 \cup \ldots \cup U_n$ açık örtüsü her U_i için (i=0,1,…,n) $f_i = f|_{U_i} \backsimeq g|_{U_i} = g_i$ şartını sağlasın. O halde

$$(h \circ f)_i = h \circ f_i \backsimeq h \circ g_i = (h \circ g)_i$$

olduğundan D(h o f, h o g) ≤ n olur.

Sonuç 4.16: [8] X ve Y yol bağlantılı uzaylar olmak üzere f: X → Y sürekli dönüşümü verilsin. Bu durumda

$$cat(f) \leq cat(X).$$

İspat: Sabit bir $x_0 \in X$ noktası için c_{x_0}, X üzerinde sabit dönüşüm ve id_X, X üzerinde birim dönüşüm olsun. Bu durumda Önerme 4.15'den

$$D(f \circ id_X, f \circ c_{x_0}) \leq D(id_X, c_{x_0}).$$

Önerme 4.17: [8] f, g: X → Y ve h: Z → X sürekli dönüşümleri verilsin. Bu durumda

$$D(f \circ h, g \circ h) \leq D(f, g).$$

İspat: D(f, g) = n olsun. $f_i \backsimeq g_i$: $U_i \rightarrow Y$ olacak şekilde X = $U_0 \cup U_1 \cup \ldots \cup U_n$ açık örtüsü verilsin. $V_i = h^{-1}(U_i) \subset Z$ verilsin. h_i: $V_i \rightarrow X$ dönüşümü, $\hat{h}_i$: $V_i \rightarrow U_i$ dönüşümünün ($\hat{h}_i(x) = h(x)$ olmak üzere) ve I_i: $U_i \subseteq X$ kapsama dönüşümünün bileşkesi olarak yazılabilir. Bu durumda

$$(f \circ h)_i = f_i \circ \hat{h}_i \backsimeq g_i \circ \hat{h}_i = g \circ I_i \circ \hat{h}_i = g \circ h_i = (g \circ h)_i$$

olduğundan $D(f \circ h, g \circ h) \leq n$ olur.

Sonuç 4.18: [8] Y yol bağlantılı uzay olmak üzere $f: X \to Y$ sürekli dönüşüm verilsin. Bu durumda

$$cat(f) \leq cat(Y).$$

İspat: Sabit bir $y_0 \in Y$ için c_{y_0}, Y üzerinde sabit dönüşüm ve id_Y, Y üzerinde birim dönüşüm olsun. c_{y_0} ve id_Y dönüşümleri alınırsa, Önerme 4.15'den

$$D(id_Y \circ f, c_{y_0} \circ f) \leq D(id_Y, c_{y_0})$$

elde edilir.

Sonuç 4.19: [8] Y yol bağlantılı olsun ve $f, g: X \to Y$ sürekli dönüşümleri verilsin. Bu durumda

$$D(f, g) + 1 \leq (cat(f) + 1)(cat(g) + 1).$$

İspat: $y_0 \in Y$ için c_{y_0}, X uzayından Y uzayına sabit dönüşüm olsun. $cat(f) = D(f, c_{y_0}) \leq m$, $cat(g) = D(g, c_{y_0}) \leq n$ olsun ve $\{U_i\}_{i=0}^{m}$, X uzayının cat(f) için ve $\{V_j\}_{j=0}^{n}$, X uzayının cat(q) için açık örtüleri olsun. $W_{i,j} = U_i \cap V_j$ açık kümeleri X uzayının açık örtüsüdür. Ayrıca, $W_{i,j}$ üzerinde $f \backsimeq c_{y_0} \backsimeq g$. Böylece $D(f, g) \leq mn$.

Sonuç 4.20: [8] X yol bağlantılı uzay olmak üzere $cat(X) \leq TC(X)$.

İspat: $i_1, i_2: X \to X \times X$ kapsama dönüşümleri ve $p_1, p_2: X \times X \to X$ sırasıyla birinci ve ikinci bileşene izdüşüm dönüşümleri olsun. Önerme 4.17'den:

$$D(c_{x_0}, id_X) = D(p_1 \circ i_2, p_2 \circ i_2) \leq D(p_1, p_2).$$

Önerme 4.21: [8] $f \circ h' \backsimeq g \circ h'$ olacak şekilde $f, g: X \to Y$ ve $h, h': Z \to X$ sürekli dönüşümleri verilsin. Bu durumda

$$D(f \circ h, g \circ h) \leq D(h, h').$$

İspat: $D(h, h') = n$ olsun. Bu durumda Z uzayının $\{U_0, U_1, \ldots, U_n\}$ açık örtüsü vardır. $u_i: U_i \hookrightarrow Z$ kapsama dönüşümü olmak üzere (her i için) $h \circ u_i \backsimeq h' \circ u_i$. Kolaylık olması açısından u_i yerine u kullanılacaktır. Bu durumda

$$f \circ h \circ u \simeq f \circ h' \circ u \simeq g \circ h' \circ u \simeq g \circ h \circ u$$

olduğundan $D(f \circ h, g \circ h) \leq n$ olur.

Sonuç 4.22: [8] X ve Y yol bağlantılı uzaylar olmak üzere $f, g: X \to Y$ sürekli dönüşümleri verilsin. Bu durumda

$$D(f, g) \leq cat(X).$$

İspat: Önerme 4.21'de $Z = X$, $h = id_X$ birim dönüşümü ve $h' = c_{x_0}$ sabit dönüşümü alınırsa Y yol bağlantılı olduğu için $f(c_{x_0})$, $g(c_{x_0}): X \to Y$ dönüşümleri için $f(c_{x_0}) \simeq g(c_{x_0})$ olduğu söylenebilir. Böylece

$$D(f, g) = D(f \circ id_X, g \circ id_X) \leq D(id_X, c_{x_0}) = cat(X).$$

Sonuç 4.23: [8] X yol bağlantılı uzay olmak üzere $TC(X) \leq cat(X \times X)$ olur.

İspat: Sonuç 4.22'de $p_1, p_2: X \times X \to X$ sırasıyla birinci ve ikinci bileşene izdüşüm dönüşümleri alınırsa ispatlanmış olur.

Önerme 4.24: [8] $f, g: X \to Y$ sürekli dönüşümleri verilsin. Bu durumda

$$D(f, g) \leq TC(Y).$$

İspat: Teorem 4.11'den; q fibrasyonu, π fibrasyonunun geri çekmesi olduğundan $secat(q) \leq secat(\pi)$. Böylece $D(f, g) \leq TC(Y)$ olur.

Önerme 4.25: [8] $f, g: X \to Y$ sürekli dönüşümleri verilsin. $\alpha: Y \to Y'$ dönüşümü olsun ve α dönüşümünün bir sol homotopi tersi var olsun. Bu durumda

$$D(\alpha \circ f, \alpha \circ g) = D(f, g).$$

İspat: α dönüşümünün sol homotopi tersi β olsun. Böylece $\beta \circ \alpha \simeq id_Y$ olur. Buradan $\beta \circ \alpha \circ f \simeq f$ ve $\beta \circ \alpha \circ g \simeq g$ elde edilir. Bunlar göz önüne alınarak ve Önerme 4.3 ve Önerme 4.15 kullanılarak

$$D(f, g) \geq D(\alpha \circ f, \alpha \circ g) \geq D(\beta \circ \alpha \circ f, \beta \circ \alpha \circ g) = D(f, g)$$

elde edilir.

Benzer şekilde Önerme 4.26 da ispatlanır.

Önerme 4.26: [8] $f, g: X \to Y$ sürekli dönüşümleri verilsin. $\beta: X' \to X$ dönüşümü olsun ve β dönüşümünün bir sağ homotopi tersi var olsun. Bu durumda

$$D(f \circ \beta, g \circ \beta) = D(f, g).$$

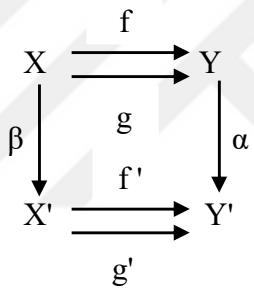
İspat: β dönüşümünün sağ homotopi tersi α olsun. Böylece $\beta \circ \alpha \simeq id_X$ olur. Buradan $f \circ \beta \circ \alpha \simeq f$ ve $g \circ \beta \circ \alpha \simeq g$ elde edilir. Bunlar göz önüne alınarak ve Önerme 4.3 ve Önerme 4.17 kullanılarak

$$D(f, g) \geq D(f \circ \beta, g \circ \beta) \geq D(f \circ \beta \circ \alpha, g \circ \beta \circ \alpha) = D(f, g)$$

elde edilir.

Sonuç olarak; homotopik uzaklık, aşağıdaki önermede verildiği anlamında bir homotopi değişmezidir.

Önerme 4.27: [8] β: X' $\simeq$ X ve α: Y $\simeq$ Y' homotopi denklikleri olsun. f, g: X $\rightarrow$ Y ve f ', g': X' $\rightarrow$ Y' sürekli dönüşümleri için α o f o $\beta \simeq$ f ' ve α o g o $\beta \simeq$ g' şartları sağlanıyorsa D(f, g) = D(f ', g') olur.



Şekil 4.3: α, β, f, g, f ' ve g' dönüşümlerinin diyagramı

Lusternik-Schnirelmann kategorisi ve Topolojik karmaşıklık homotopi değişmezidir:

Sonuç 4.28: [8] X ve X' aynı homotopi tipine sahip uzaylar olsun. Bu durumda

$$cat(X) = cat(X') \text{ ve } TC(X) = TC(X').$$

5. HOMOTOPİK UZAKLIĞIN OLUŞTURDUĞU PSEUDOMETRİK UZAYLAR

Homotopik uzaklığın sahip olduğu bazı özellikler sayesinde homotopik uzaklık pseudometrik olarak görülebilir. Bu bölümde bu özellikler ve homotopik uzaklığın oluşturduğu pseudometrik uzaylardan bahsedilecektir.

Tanım 5.1'de verilen farklı metrik tanımları için temel referans olarak [10], [11] ve [12] numaralı kaynaklar verilebilir.

Tanım 5.1: M boştan farklı bir küme olsun. $d: M \times M \to [0,\infty)$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa d dönüşümüne M kümesinde *pseudometrik*, (M,d) ikilisine *pseudometrik uzay* denir. $m, n, k \in M$ için,

M1) $d(m, m) = 0$,

M2) $d(m, n) = d(n, m)$,

M3) $d(m, n) \leq d(m, k) + d(k, n)$.

Ayrıca, eğer d pseudometrik, M1) ve M2) şartlarına ek olarak (M3 hariç) aşağıdaki M4) şartı da sağlıyorsa d dönüşümüne M kümesinde *semimetrik* denir;

M4) $d(m, n) = 0 \Leftrightarrow m = n$.

$d: M \times M \to [0,\infty]$ dönüşümü, M1), M2) ve M3) şartlarını sağlıyorsa d dönüşümüne M kümesinde bir *genişletilmiş pseudometrik*, M1), M2) ve M4) şartlarını sağlıyorsa M kümesinde bir *genişletilmiş semimetrik* denir.

Lemma 5.2, Önerme 5.3 ve Önerme 5.4'ün ispatı için gereklidir.

Lemma 5.2: [13] X normal uzay olsun. X uzayının $\{U_0, U_1,\ldots, U_m\}$ ve $\{V_0, V_1,\ldots, V_n\}$ iki açık örtüsü verilsin öyle ki U_i açık alt kümeleri özellik (A) ve V_i açık alt kümeleri özellik (B)'yi sağlasın. Bu özellik (A) ve özellik (B)'yi sağlayan uzayların açık alt kümelerinde ve ayrık birleşimlerinde de bu özellikler korunsun. Bu durumda X uzayının $\{W_0, W_1,\ldots, W_{m+n}\}$ açık örtüsü vardır ki W_i açık alt kümeleri özellik (A) ve (B)'nin ikisini de sağlar.

Önerme 5.3: [14] X normal uzay olsun. $f, g, h: X \to Y$ sürekli dönüşümleri verilsin. Bu durumda

$$D(f, h) \leq D(f, g) + D(g, h).$$

İspat: D(f, g) = m ve D(g, h) = n olsun. $f|_{U_i} \backsimeq g|_{U_i}$ (i=0,1,…,m) ve $g|_{V_i} \backsimeq h|_{V_i}$ (j=0,1,…,n) olacak şekilde X uzayının $\{U_0, U_1,\ldots, U_m\}$ ve $\{V_0, V_1,\ldots, V_n\}$ açık örtüleri vardır. Bu durumda, Lemma 5.2'den, X uzayının $\{W_0, W_1,\ldots, W_{m+n}\}$ üçüncü bir açık örtüsü vardır ki $f|_{W_k} \backsimeq g|_{W_k} \backsimeq h|_{W_k}$ (tüm k lar için). Böylece D(f, h) ≤ m + n olduğu ispatlanmış olur.

Açıklama: [14] Önerme 4.2 ve Önerme 5.3, homotopik uzaklığın pseudometrik oluşturmasına izin veren özellikleridir.

i) D(f, g) = D(g, f),

ii) D(f, g) = 0 ⇔ f ≃ g,

iii) X normal uzay ve f, g, h: X → Y olsun. D(f, h) ≤ D(f, g) + D(g, h).

Önerme 5.4: [14] X normal uzay olsun. f, g: X → Y ve f', g': Y → Z sürekli dönüşümleri verilsin. Bu durumda

$$D(f' \circ f, g' \circ g) \leq D(f, g) + D(f', g').$$

İspat: D(f, g) = m olsun. X uzayının bir $\{U_0, U_1,\ldots, U_m\}$ açık örtüsü vardır ki $f|_{U_i} \backsimeq g|_{U_i}$ (i=0,1,…,m). Böylece bu örtüdeki her U_i için g' o f ≃ g' o g olur. Bu özellik (A) olsun.

Şimdi de, D(f ', g') = n olsun. Y uzayının bir $\{V_0, V_1,\ldots, V_n\}$ açık örtüsü vardır ki $f'|_{V_i} \backsimeq g'|_{V_i}$, i=0,1,…,n için. Bu durumda X uzayının $\{f^{-1}(V_0),\ldots,f^{-1}(V_n)\}$ açık örtüsündeki her açık alt küme üzerinde f ' o f ≃ g' o f olur. Bu da özellik (B) olsun.

Lemma 5.2'den dolayı X uzayının $\{W_0, W_1,\ldots, W_{m+n}\}$ üçüncü açık örtüsü vardır öyle ki her W_i üzerinde f ' o f ≃ g' o f ≃ g' o g sağlanır. Böylece D(f' o f, g' o g) ≤ m + n ispatlanmış olur.

Açıklama: [14] Map(X,Y), X uzayından Y uzayına sürekli dönüşümlerin kümesi olsun:

$$Map(X,Y) = \{f: X \to Y \mid f \text{ sürekli}\}.$$

D dönüşümü şu şekilde tanımlansın:

$$D: Map(X,Y) \times Map(X,Y) \to [0,\infty]: (f,g) \mapsto D(f, g).$$

$\mathscr{R}$, Map(X,Y) üzerinde

$$f \mathscr{R} g \Leftrightarrow D(f, g) = 0$$

şeklinde tanımlanan bir denklik bağıntısıdır. Bu durumda D, Map(X,Y) / $\mathscr{R}$ bölümünde genişletilmiş semimetriktir.

Açıklama: [14] X normal uzay kabul edildiğinde D, Map(X,Y) üzerinde genişletilmiş pseudometrik olur. Bir genişletilmiş pseudometrik, açık disklerin kümesinin ürettiği bir pseudometrik uzay oluşturur. Bu durumda Map(X,Y) üzerinde D dönüşümünün oluşturduğu topoloji

$$B_r(f) := \{g \in Map(X,Y) \mid D(f, g) < r\},\ r > 0$$

açık diskleri tarafından üretilir.

$r \leq 1$ için, $B_r(f)$, f dönüşümüne homotopik olan dönüşümlerden oluşmaktadır.

Önerme 5.5: [14] X normal uzay olsun. $f \in Map(X,Y)$ için $B_r(f)$ ($r \leq 1$) açık diskin topolojisi indiskret topolojidir.

İspat: $\varepsilon > 0$ ve tüm $f \in B_r(f)$ için $B_r(f) \subseteq B_\varepsilon(f)$

Önerme 5.5, $B_r(f)$ açık diskinin $r \leq 1$ olduğu durumlarda bağlantılı olduğunu verir, ancak belirli bir koşul altında, $r > 1$ olduğu durumlarda bu doğru değildir.

Önerme 5.6: [14] $B_1(f)$, $B_r(f)$ açık diskinin bir özalt kümesi olması koşuluyla $r > 1$ için $B_r(f)$ bağlantılı değildir.

İspat: $U = B_1(f)$ alınsın. $r > 1$ için $U = B_1(f) \subseteq B_r(f)$. Böylece U açıktır. $\overline{U} = U \cup \{h \in B_r(f) \mid D(h, U) = 0\} = U$ olduğundan U aynı zamanda kapalıdır. Burada $D(h, U) = \min_{g \in U} D(h, g)$.

Şimdi de açık bir küme olan $V = U^C$ olsun. $B_1(f)$, $B_r(f)$ açık diskinin bir özalt kümesi olduğu için V boştan farklıdır. Boştan farklı U ve V için, $U \cup V = B_r(f)$ ve $U \cap V = \emptyset$ olduğu bulunur. Bu da $B_r(f)$ açık diskinin bağlantılı olmadığını gösterir.

Lemma 5.7: [14] X sonsuz diskret uzay olsun. id_X ve c_{x_0}, X üzerinde sırasıyla birim dönüşüm ve sabit dönüşüm olsun. Bu durumda $D(id_X, c_{x_0}) = \infty$.

İspat: Herhangi bir diskret uzay normal uzaydır. Böylece D, Map(X,X) üzerinde bir pseudometriktir. X diskret uzay olduğu için id_X ve c_{x_0} homotopik değildir. Dolayısıyla $D(id_X, c_{x_0}) > 0$ olur. $n > 0$ tamsayısı için $D(id_X, c_{x_0}) = n$ olsun. Bu

durumda X uzayının öyle bir $\{U_0, U_1,\ldots, U_n\}$ açık örtüsü vardır ki $id_X|_{U_i} \backsimeq c_{x_0}|_{U_i}$, i=0,1,…,n. Böylece her U_i, X uzayında büzülebilirdir. Dolayısıyla X yol bağlantılıdır. Diskret bir uzayın yol bağlantılı açık alt kümeleri sadece tek elemanlı kümeler olduğu için $\{U_0, U_1,\ldots, U_n\}$, X uzayını örtmez. Böylece $D(id_X, c_{x_0}) = \infty$.

KAYNAKLAR

[1] Bizim, O. (2013). *Genel Topoloji*. Bursa: Dora Basım-Yayın Dağıtım.

[2] Munkreas, J. (2000). *Topology*. Edinburg: Pearson College Edition.

[3] Cangül, İ. N. (2016). *Soyut Cebir*. Bursa: Dora Basım-Yayın Dağıtım.

[4] Bredon, G. E. (1993). *Topology and Geometry*. NY: Spinger.

[5] Rotmann, J. J. (1988). *An Introduction to Algebraic Topology*. NY: Spinger.

[6] Hatcher, A. (2001). *Algebraic Topology*. Cambridge: Cambridge University Press.

[7] Borat A. (2005). *Homotopi Grupları.* (Lisans Tezi). Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, İzmir.

[8] Macias-Virgos, E. ve Mosquera-Lous, D. (2022). Homotopic Distance Between Maps, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 172 (1), 73-93.

[9] Cornea, O., Lupton, G., Oprea, J., Tanre, D. (2003). *Lusternik-Schnirelmann Category*. RI: Mathematical Survey and Monographs.

[10] Arkhangel'skii, A.V. ve Pontryagin, L.S. (1990). *General Topology I*. NY: Springer.

[11] Cobzaş Ş., Miculescu R., Nicolae A. (2019). *Lipschitz Functions*, Switzerland: Springer.

[12] Grandis M. (2018). *Category Theory and Applications: A Textbook for Beginners*, New Jersey: World Scientific Publishing.

[13] Oprea, J. and Strom, J. (2011). Mixing categories. *Proceedings of The American Mathematical Society*, 139 (9), 3383-3392.

[14] Vergili, T. ve Borat, A. (2022). Topological spaces induced by homotopic distance, *Journal of Linear and Topological Algebra,* 11 (2), 85-91.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı **:** Özge GENÇ KARA

Doğum Tarihi ve Yeri :

Yabancı Dili **:** İngilizce

E-posta **:**

ÖĞRENİM DURUMU

Yüksek Lisans: Matematik Anabilim Dalı, Bursa Teknik Üniversitesi, devam ediyor

Lisans **:** Matematik Bölümü, Uludağ Üniversitesi, 2020

Lisans **:** Endüstri Mühendisliği, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, 2010