

# İki Malzemeli Kompozit Bir Kirişin Serbest ve Zorlanmış Titreşimlerinin İncelenmesi

*Araştırma Makalesi / Research Article*

**Şeref Doğuşcan AKBAS\***

Doğa Bilimleri ve Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Bursa Teknik Üniversitesi, Türkiye

(Geliş/Received : 22.12.2016 ; Kabul/Accepted : 21.03.2017)

## ÖZ

Bu çalışmada, iki malzemeli kompozit basit mesnetli bir kirişin serbest ve zorlanmış titreşimi dış basınç yükü etkisi altında araştırılmıştır. Ele alınan kompozit kirişin çözümünde, düzlem parçalı sürekli ortam modeli ve sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Söz konusu problemin yönetici denklemleri, Hamilton prensibi ile elde edilmiştir. İki malzemeli kirişin boyutları, levha modeli olacak biçimde seçilerek düzlem gerilme problemi uygulanmıştır. Ele alınan çalışmada, farklı malzeme sabit oranları ile dağılımlarının, kirişin serbest ve zorlanmış titreşim cevaplarına olan etkileri araştırılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** İki malzemeli kompozit kiriş, sonlu elemanlar yöntemi, serbest titreşim, zorlanmış titreşim.

## Investigation on Free and Forced Vibration of a Bi-Material Composite Beam

### ABSTRACT

In this study, free and forced vibration of a bi-material composite beam subjected to external pressure load is investigated. In the solution of the composite beam, plane piecewise solid continua model and finite element method is used. The governing equations of the problems are obtained by using the Hamilton procedure. With the dimensions of the bi-material beam are assumed as plane model, the plane stress problem is implemented. In the study, the effects of the different material constant ratios and distributions on the free and forced vibration responses are investigated.

**Keywords:** Bi-Material composite beam, finite element method, free vibration, forced vibration

### 1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Bilindiği gibi kompozit malzemeler, iki yada daha fazla farklı malzemelerin üstün özelliklerini birleştirerek daha dayanıklı bir malzeme oluşturulması amacıyla üretilen malzemelerdir. Teknolojinin gelişmesi ile birlikte, kompozit malzemeler gün geçtikçe uygulama alanı artmaktadır. En bilinen kompozit yapı türlerinden biri olan iki malzemeli kompozit yapılarda, bir malzeme sıcaklık, korozyon gibi dış etkilere karşı dayanım sağlarken, diğer malzeme ise mekanik yüklere karşı dayanım sağlamaktadır. Örnek olarak, çelik/seramik karışımı kompozit malzemede, mekanik yüklerden ortaya çıkan gerilmeleri çelik ile dayanım sağlarken, sıcaklık ve korozyon gibi etkileri ise seramik malzemesi dayanım sağlamaktadır. İki malzemeli kompozit kirişler ile yapılan çalışmalar incelendiğinde; Doyle [1] iki boyutlu iki malzemeli yapının dinamik cevaplarını incelemiştir. Shu ve Fan [2] parçalı ve iki malzemeli bir kirişin dinamik analizini incelemiştir. Shu ve MSRao [3] delaminasyonlu iki malzemeli bir kirişin burkulma analizini araştırmışlardır. Her ve Su [4] iki malzemeli, iç çatlaklı bir kirişin şekil değiştirme enerjisi salıverme oranını araştırmışlardır.

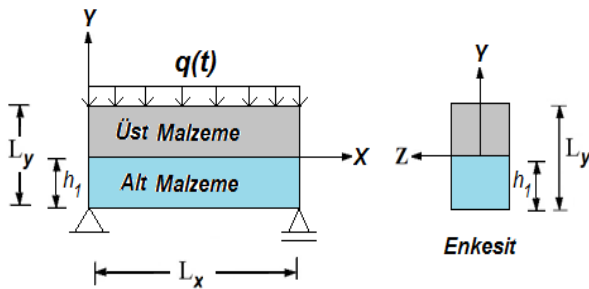
Yu vd. [5] epoksi/çelik malzemelerinden yapılmış iki malzemeli bir kirişin artık gerilmelerini deneysel olarak incelemiştir. Zhang ve Paulino [6] fonksiyonel derecelendirilmiş ve iki malzemeli kirişlerin dinamik ve dalga yayılımlarını sonlu elemanlar yöntemi ile incelemiştir. Della ve Shu [7] delaminasyonlu iki malzemeli bir kirişin serbest titreşim analizini araştırmışlardır. Srinivasan ve Spearing [8] iki malzemeli piezoelektrik mikro aktüatörlerin optimum malzeme seçimlerine dair çalışmışlardır. Batra vd. [9] iki malzemeli çubukların serbest ve zorlanmış titreşimlerini ağırsız lokal Petrov-Galerkin yöntemi ile çözmüşlerdir. Eren [10,11] İki malzemeli konsol kirişin büyük yer değiştirmesini incelemiştir. Wu [12] iki malzemeli kirişlerin manyetik ile termal yükler altında titreşim davranışlarını incelemiştir. Lin vd. [13] SiN<sub>x</sub>/Al malzemelerinden oluşmuş iki malzemeli konsol bir mikro yapının termo-mekanik davranışlarını araştırmışlardır. Carlberger and Stigh [14] iki malzemeli kirişlerin dinamik test ve simülasyonlarını yapmışlardır. Ivanova vd. [15] dinamik yükler altındaki malzemeli bir plağın dinamik davranışları incelenmiştir. Wang ve Liu [16] iki malzemeli, ortasından tabakalandırılmış bir kirişin analitik çözümünü araştırmıştır. Her vd. [17] iki malzemeli tabakalı bir yapının termal gerilme analizini yapmışlardır. Petrova ve Schmauder [18] çatlak içeren fonksiyonel derecelendirilmiş, homojen ve iki malzemeli

\*Sorumlu Yazar (Corresponding Author)  
e-posta : serefda@yahoo.com

sistemlerin termal kırılma analizlerini incelemişlerdir. Voicu vd. [19] iki malzemeli konsol bir kirişte, boyut etkisinin gerilmeler üzerindeki etkilerini araştırmışlardır. Akbaş [20,21,22,23,24,25,26,27], Kocatürk ve Akbaş [28,29,30], Akbaş ve Kocatürk [31,32,33], Kocatürk vd. [34] fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit kirişler ile düzlem kirişlerin titreşim ve burkulma sonrası davranışlarını araştırmıştır. Suhir ve Nicolics [35] iki malzemeli konsol bir kirişin eğilme davranışlarını incelemişlerdir. Wu [36] iki malzemeli, manyetik-elastik özellikli konsol bir kirişin doğrusal olmayan titreşim analizini yapmıştır. Liu ve Shu [37] elastik zemine oturan delaminasyonlu iki malzemeli kirişlerin titreşim davranışlarını analitik olarak çözmüşlerdir. Petrova ve Schmauder [38] çatlak içeren fonksiyonel derecelendirilmiş, homojen ve iki malzemeli sistemlerin termo-mekanik yükler etkisi altında kırılma davranışlarını incelemişlerdir. Chama vd. [39] termo-mekanik yükler etkisi altında iki malzemeli kirişlerin çatlak ilerlemesini incelemişlerdir. Li vd. [40] iki malzemeli mikro kirişlerin modifiye edilmiş kuvvet çifti gerilmesi teorisi serbest titreşim cevaplarını incelemiştir. Ele alınan çalışmada iki malzemeli kompozit basit mesnetli bir kirişin dinamik davranışları, serbest ve zorlanmış titreşim halleri ile incelenmiştir. Ele alınan kompozit kiriş elamanı, levha olarak modellenmiş olup, düzlem parçalı sürekli ortam modeli kullanılmıştır. Probleme ait yönetici denklemleri, Hamilton prensibi ile elde edilmiş olup, problemin çözümünde sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Farklı malzeme sabit oranları ile dağılımlarına göre, serbest ve zorlanmış titreşim cevapları elde edilmiştir.

## 2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU (FORMULATION AND SOLUTION OF THE PROBLEM)

Düzgün yayılı dinamik yük etkisi altında  $q(t)$ , iki malzemeli kompozit malzemeden yapılmış basit mesnetli bir kiriş,  $X, Y, Z$  koordinat takımı ile birlikte şekil 1'de gösterilmiştir. Kirişin yatay ve düşey uzunlukları sırasıyla  $L_x, L_y$ , kalınlığı ise  $t_z$ , alt malzemenin tabandan yüksekliği  $h_1$  ile gösterilmiştir. Kirişin geometrik sınır şartlarında, sol alt ucu sabit mesnetli, sağ alt ucu ise kayıcı mesnetli olarak alınmıştır.



Şekil 1. Düzgün yayılı dinamik yük etkisi altında, iki malzemeli basit mesnetli bir kiriş (A simple Supported Bi-Material Beam Under Uniform Dynamic Load).

Probleme ait şekil değiştirme- yer değiştirme ilişkisi izleyen şekilde verilmiştir:

$$\varepsilon_{XX} = \frac{\partial u}{\partial X}, \quad \varepsilon_{YY} = \frac{\partial v}{\partial Y}, \quad 2\varepsilon_{XY} = \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \quad (1)$$

Burada  $\varepsilon_{XX}, \varepsilon_{YY}$  sırasıyla  $X$  ve  $Y$  doğrultularındaki eksenel şekil değiştirmeleri,  $\varepsilon_{XY}$  ise açılmal şekil değiştirmeyi göstermektedir. Şekil değiştirme ile yer değiştirme arasındaki bağıntı, matris formda aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{XX} \\ \varepsilon_{YY} \\ 2\varepsilon_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial Y} \\ \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial}{\partial X} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (2a)$$

$$\{\varepsilon\} = [D]\{d\} \quad (2b)$$

Burada  $[D]$  şekil değiştirme ile yer değiştirmeler arasındaki diferansiyel operatör,  $\{d\}$  ise yer değiştirme vektörüdür. Probleme ait bünye denklemleri izleyen şekilde verilmiştir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{XX} \\ \sigma_{YY} \\ \sigma_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{XX} \\ \varepsilon_{YY} \\ 2\varepsilon_{XY} \end{Bmatrix} \quad (3a)$$

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (3b)$$

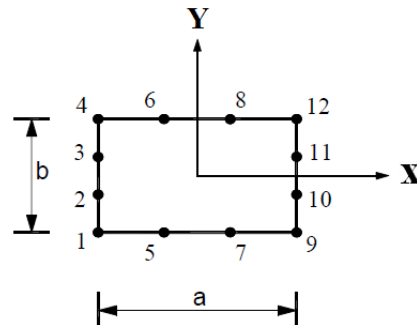
Burada  $[C]$  malzeme bünye tansörü,  $C_{11}, C_{12}, C_{22}, C_{66}$  indirgenmiş bünye tansör birleşenleri olup, değerleri düzlem gerilme hali için izleyen ifadelerde verilmiştir:

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad C_{12} = C_{21} = \nu \frac{E}{1-\nu^2}, \quad C_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4)$$

Burada  $E$  Elastisite modülü,  $\nu$  ise Poisson oranıdır. Probleme ait yönetici denklemlerinin elde edilmesinde Hamilton prensibinden yararlanılmıştır. Dinamik etkileri göz önüne alınarak, düzlem parçalı sürekli ortam modeli için virtüel iş izleyen şekilde verilmiştir:

$$t_z \int_A (\sigma_{XX} \delta \varepsilon_{XX} + 2\sigma_{XY} \delta \varepsilon_{XY} + \sigma_{YY} \delta \varepsilon_{YY} + \rho \dot{u} \delta u + \rho \dot{v} \delta v) dA - t_z \int_S (r_X \delta u + r_Y \delta v) dS - t_z \int_A (k_X \delta u + k_Y \delta v) dA = 0 \quad (5)$$

Burada  $r_X$  ve  $r_Y$  yüzey kuvvetleri,  $\rho$  kütle yoğunluğu,  $k_X$  ve  $k_Y$  sırasıyla  $X$  ve  $Y$  doğrultularındaki birim hacmin kütle kuvvetleridir. (5) eşitliğindeki  $\dot{u}, \dot{v}$  ifadeleri, zamana göre ikinci türevi göstermektedir. Probleme ait sonlu elemanlar çözümü için, 12 düğüm noktalı dikkörtgen sonlu eleman kullanılmıştır (Şekil 2).



Şekil 2. 12 düğüm noktalı dikkörtgen, iki boyutlu eleman (A twelve-node quadratic plane element).

Şekil 2 de  $a$  ve  $b$  sırasıyla sonlu elemanın yatay ve düşey uzunluklarını göstermektedir. Sonlu elemanın yer değiştirme alanları, düğüm yer değiştirmeleri cinsinden izleyen şekilde ifade edilir:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [\emptyset]\{d_n\} \quad (6a)$$

$$[\emptyset] = [\emptyset_1 \ \emptyset_2 \ \dots \ \emptyset_{12}] \quad (6b)$$

$$\{d_n\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{12} \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{12} \end{Bmatrix} \quad (6c)$$

$$u = (u_1\emptyset_1 + u_2\emptyset_2 + u_3\emptyset_3 + u_4\emptyset_4 + u_5\emptyset_5 + u_6\emptyset_6 + u_7\emptyset_7 + u_8\emptyset_8 + u_9\emptyset_9 + u_{10}\emptyset_{10} + u_{11}\emptyset_{11} + u_{12}\emptyset_{12}) \quad (6d)$$

$$v = (v_1\emptyset_1 + v_2\emptyset_2 + v_3\emptyset_3 + v_4\emptyset_4 + v_5\emptyset_5 + v_6\emptyset_6 + v_7\emptyset_7 + v_8\emptyset_8 + v_9\emptyset_9 + v_{10}\emptyset_{10} + v_{11}\emptyset_{11} + v_{12}\emptyset_{12}) \quad (6e)$$

Burada  $u_i$  ve  $v_i$  düğüm noktalarının sırasıyla, yatay ile düşey yer değiştirmeleridir.  $\{d_n\}$  düğüm noktalarına ait yer değiştirme vektörü olup, birleşenleri  $u_i$  ve  $v_i$  dir. Eşitlik (6)'de  $\emptyset_i$ , şekil fonksiyonlarını göstermektedir. 12 düğüm noktalı dikdörtgen sonlu elemana ait şekil fonksiyonları izleyen şekilde ifade verilmiştir:

$$\begin{aligned} \emptyset_1 &= \frac{1}{32} \left(1 - \frac{2X}{a}\right) \left(1 - \frac{2Y}{b}\right) \left(-10 + 9 \left(\frac{4X^2}{a^2} + \frac{4Y^2}{b^2}\right)\right), \\ \emptyset_2 &= \frac{9}{32} \left(1 - \frac{2X}{a}\right) \left(1 - \frac{4Y^2}{b^2}\right) \left(1 - \frac{6Y}{b}\right) \\ \emptyset_3 &= \frac{9}{32} \left(1 - \frac{2X}{a}\right) \left(1 - \frac{4Y^2}{b^2}\right) \left(1 + \frac{6Y}{b}\right), \\ \emptyset_4 &= \frac{1}{32} \left(1 - \frac{2X}{a}\right) \left(1 + \frac{2Y}{b}\right) \left(-10 + 9 \left(\frac{4X^2}{a^2} + \frac{4Y^2}{b^2}\right)\right) \\ \emptyset_5 &= \frac{9}{32} \left(1 - \frac{2Y}{b}\right) \left(1 - \frac{4X^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{6X}{a}\right), \\ \emptyset_6 &= \frac{9}{32} \left(1 + \frac{2Y}{b}\right) \left(1 - \frac{4X^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{6X}{a}\right) \\ \emptyset_7 &= \frac{9}{32} \left(1 - \frac{2Y}{b}\right) \left(1 - \frac{4X^2}{a^2}\right) \left(1 + \frac{6X}{a}\right), \\ \emptyset_8 &= \frac{9}{32} \left(1 + \frac{2Y}{b}\right) \left(1 - \frac{4X^2}{a^2}\right) \left(1 + \frac{6X}{a}\right) \\ \emptyset_9 &= \frac{1}{32} \left(1 + \frac{2X}{a}\right) \left(1 - \frac{2Y}{b}\right) \left(-10 + 9 \left(\frac{4X^2}{a^2} + \frac{4Y^2}{b^2}\right)\right), \\ \emptyset_{10} &= \frac{9}{32} \left(1 + \frac{2X}{a}\right) \left(1 - \frac{4Y^2}{b^2}\right) \left(1 - \frac{6Y}{b}\right) \\ \emptyset_{11} &= \frac{9}{32} \left(1 + \frac{2X}{a}\right) \left(1 - \frac{4Y^2}{b^2}\right) \left(1 + \frac{6Y}{b}\right), \\ \emptyset_{12} &= \frac{1}{32} \left(1 + \frac{2X}{a}\right) \left(1 + \frac{2Y}{b}\right) \left(-10 + 9 \left(\frac{4X^2}{a^2} + \frac{4Y^2}{b^2}\right)\right) \end{aligned} \quad (7)$$

(2) ile (6) eşitlikleri, (3) eşitliğinde yerlerine yazılırsa bünye bağıntısı izleyen şekilde olur:

$$\{\sigma\} = [C][D][\emptyset]\{d_n\} = [C][B]\{d_n\} \quad (8)$$

(8) eşitliğinde  $[B]$  ifadesi,  $[B] = [D][\emptyset]$  olarak tanımlanmıştır. Virtüel yer değiştirme ile şekil değiştirmelerin matris formları izleyen şekilde verilmiştir:

$$\{\delta d\} = [\emptyset]\{\delta d_n\}, \{\delta \ddot{d}\} = [\emptyset]\{\delta \ddot{d}_n\}, \{\delta \varepsilon\} = [B]\{\delta d\} \quad (9)$$

(8) ve (9) eşitlikleri virtüel iş eşitliğine yerine yazıldığında, izleyen ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} &t_z \int_A \{\delta d_n\}^T ([B]^T [C][B]\{d_n\} + \\ &\rho(Y)[\emptyset]^T [\emptyset]\{\delta \ddot{d}\}) dA - t_z \int_S \{\delta d_n\}^T [\emptyset]^T \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \end{Bmatrix} dS \\ &- t_z \int_A \{\delta d_n\}^T [\emptyset]^T \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \end{Bmatrix} dA = 0 \end{aligned} \quad (10a)$$

$$\{\delta d_n\}^T ([K]\{d_n\} + [M]\{\ddot{d}\} - \{r\} - \{s\}) = 0 \quad (10b)$$

(10b) eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra, probleme ait sonlu elemanlar hareket denklemi izleyen şekilde elde edilir:

$$[K]\{d_n\} + [M]\{\ddot{d}_n\} = \{F\} \quad (11)$$

Burada  $[K]$  rijitlik matrisi,  $[M]$  kütle matrisi,  $\{F\}$  yük vektörü,  $\{d_n\}$  yer değiştirme vektörü,  $\{\ddot{d}_n\}$  ivme vektörü,  $\{s\}$  düğüm noktalarına indirgenmiş kütle kuvvetleri vektörü,  $\{r\}$  düğüm noktalarına indirgenmiş dış yükler vektörüdür. Sonlu elemanlar hareket denklemini oluşturan matris ve vektörlerin detayları izleyen şekilde ifade verilmiştir:

$$[K] = t_z \int_A [B]^T [C][B] dA \quad (12a)$$

$$[M] = t_z \int_A \rho(Y)[\emptyset]^T [\emptyset] dA \quad (12b)$$

$$\{F\} = \{r\} + \{s\} \quad (12c)$$

$$\{r\} = \int_S [\emptyset]^T \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \end{Bmatrix} dS \quad (12d)$$

$$\{s\} = \int_A [\emptyset]^T \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \end{Bmatrix} dA \quad (12e)$$

(11) eşitliğinde verilen eleman rijitlik matrisi, kütle matrisi ve yük vektörü, bilinen sonlu elemanlar birleştirme işlemleri sonucu ile sistem rijitlik matrisi, kütle matrisi ve yük vektörü elde edilir. Bu matris ve vektörlerin boyutları, sistemin serbestlik derecesi kadar olur. Kirişin elemanın iki malzemeli olması durumunda hesaplanacak sonlu eleman matris ve vektörleri, malzemelerin konumlarına bağlı olarak her bir sonlu elemanın o malzeme sabitleri değerleri ile hesap edilip, bilinen sonlu elemanlar birleştirme yöntemleri ile elde edilir. Ele alınan problem iki boyutlu dikdörtgen sonlu elemanlar modeli ile çözüldüğünden dolayı, her bir dikdörtgen sonlu elemana hangi malzemenin yer aldığı malzeme dağılım oranından tespit edilip, her bir sonlu

elemana düşen malzeme sabitleri değerleri ile eşitlik 12'de verilen matris ve vektörlerin hesap işlemleri yapılır.

Zorlanmış titreşim probleminde, zorlayıcı yük;

$$q(t) = q_0 \sin(\bar{w}t) \quad (13)$$

harmonik bir fonksiyon biçiminde seçilmiştir. Burada  $q_0$  zorlayıcı yükün genliği, Zorlanmış titreşim çözümü için, zorlayıcı yükün özelliğine göre yer değiştirme vektörü izleyen formda seçilmiştir;

$$\{d_n\} = \{d_m\} \sin(\bar{w}t) \quad (14)$$

burada  $\{d_m\}$  yer değiştirmenin genliğidir. (14) eşitliği, (11) eşitliğinde yerine yazılırsa, zorlanmış titreşim için sonlu elemanlar hareket denklemi izleyen şekilde olur:

$$\{d_m\}([K] - \bar{w}^2[M]) = \{F\} \quad (15)$$

Serbest titreşim problemi için ise, (11) eşitliğin sağ tarafındaki yük vektörü sıfır alınarak elde edilen denklem ile çözüme ulaşılır. Bu durumda elde edilen denklem ile özdeğer problemi oluşmaktadır:

$$[K]\{d_n\} + [M]\{\dot{d}_n\} = 0 \quad (16a)$$

$$([K] - w^2[M])\{\hat{d}_n\} = 0 \quad (16b)$$

Burada  $w$  sistemin doğal açısal frekansı,  $\{\hat{d}_n\}$  ise mod vektörüdür. Elde edilen sonlu elemanlar denklemlerinin integrasyon hesaplarında, beş noktalı Gauss integral kuralı kullanılmıştır. Sonlu elemanlar denklemlerinin çözümü, sayısal ve grafik sonuçların elde edilmesinde, MATLAB programında algoritma ve program yazılmıştır. MATLAB'da yazılan programın algoritması eklerde verilmiştir.

Sayısal işlemlerde kullanılan boyutsuz ifadeler izleyen şekilde verilmiştir:

$$P_R = \frac{P_A}{P_U} \quad (17a)$$

$$h_o = \frac{h_1}{L_Y} \quad (17b)$$

Burada  $P_R$  malzeme sabit oranı olup, alt malzeme sabitleri değerinin ( $P_A$ ) üst malzeme sabitleri değerine ( $P_U$ ) oranıdır.  $h_o$  ise malzeme dağılım oranı olup, alt malzeme yüksekliğinin ( $h_1$ ) kiriş yüksekliğine ( $L_Y$ ) oranıdır.

### 3. SAYISAL SONUÇLAR (NUMERICAL RESULTS)

Sayısal hesaplarda, farklı malzeme oranları ile malzeme dağılımlarına göre, iki malzemeli kompozit basit bir kirişin serbest ve zorlanmış titreşim cevapları incelenmiştir. İki malzemeli yapı için, kirişin alt malzeme özellikleri;  $E=70 \text{ GPa}$ ,  $\nu=0.33$ ,  $\rho=1200 \text{ kg/m}^3$  alınmış olup, üst kısmı ise eşitlik (17a) a göre farklı malzeme sabit oranlarına göre alt malzeme sabitleri değerlerinin katları olarak belirlenmiştir. Kirişin üst malzeme sabitleri değerleri (Young Modülü, Poisson oranı), alt malzeme sabitleri değerlerinin  $1/P_R$  katı olacak

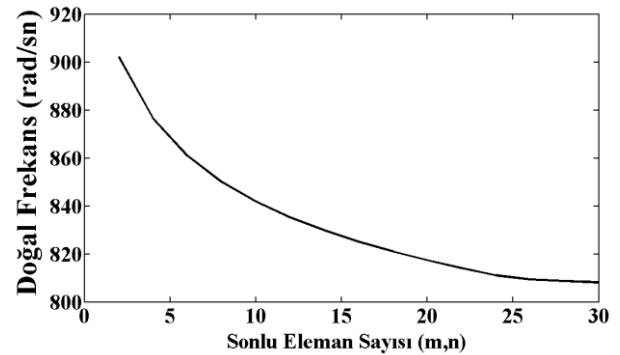
şekilde alınmıştır. İncelenen problemde, kiriş boyutları  $L_X=4 \text{ m}$ ,  $L_Y=1 \text{ m}$ ,  $t_Z=0.1 \text{ m}$  seçilmiştir.

Sonlu elemanlar formülasyonlarının çözümünde, kirişin geometrik sınır koşulları, sol alt ucu sabit mesnetli ile sağ alt ucu ise kayıcı mesnetli olduğundan dolayı, yer değiştirme vektörünün mesnet noktalarına karşılık gelen değerleri sıfır alınır:

$$u_1 = v_1 = 0, \quad X = 0, \quad Y = -0.5 L_Y \quad (18a)$$

$$v_9 = 0, \quad X = L_X, \quad Y = -0.5 L_Y \quad (18b)$$

Sayısal hesaplamalarda sonlu eleman sayısını belirleyebilmek için serbest titreşim sonuçları üzerine yakınsama çalışması yapılmıştır. Şekil 3'de  $P_R=2$  (üst kısmın malzeme sabitleri değerleri, alt kısım malzeme sabitleri değerlerinin yarısı kadardır.),  $h_o=0.5$  (iki malzemenin yükseklikleri eşittir.) değerleri için iki malzemeli kompozit basit kirişin doğal frekansları, değişik sonlu eleman sayılarına göre hesaplanmış ve gösterilmiştir. Şekil 3'deki yakınsama grafiklerinde, yatay sonlu eleman  $m$ , düşey sonlu eleman  $n$  ile gösterilmiştir. Sonlu eleman sayısı belirlenirken yatay ve düşey sonlu elemanlar eşit alınmıştır ( $m=n$ ).



Şekil 3. Sonlu eleman sayısı için yakınsama çalışması (The Convergence Study for the number of the Finite Element).

Şekil 3'de görülmektedir ki, hem yatay hem de düşey sonlu eleman sayıları ( $m,n$ ) 24 değerine ulaştıktan sonra, doğal frekans değerleri yakınsamaktadır. Yakınsama çalışması sonucunda, sayısal hesaplarda sonlu eleman sayıları  $m=n=24$  alınmıştır.

Elde edilen formülasyonların ve Matlab program dilinde yazılan bilgisayar programının doğruluğunu test etmek amacıyla, ele alınan problem ANSYS Workbench 14.0 [41] sonlu elemanlar paket modellenmiştir. Probleme ait bazı sonuçlar, ANSYS Workbench paket programından elde edilen sonuçlarla karşılaştırmalar yapılmıştır. Problemin ANSYS Workbench programındaki çözümünde, üç boyutlu sonlu elemanlar modeli kullanılmıştır. Çizelge 1'de elde farklı  $P_R$  ile  $h_o$  değerleri için elde edilen frekanslar, ANSYS Workbench paket programında elde edilen frekans değerleri ile karşılaştırılmıştır.

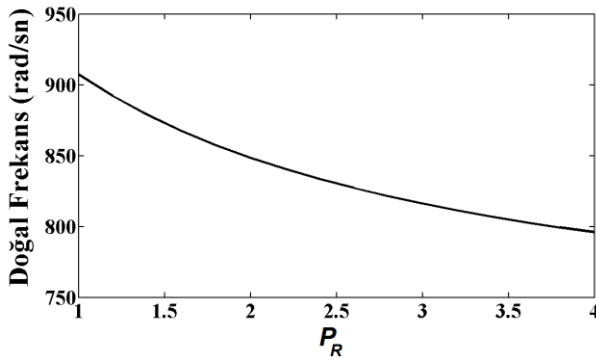
Çizelge 1. Karşılaştırma çalışması (Comparison study)

$h_o$	$P_R=3$		$P_R=5$	
	Sunulan	ANSYS	Sunulan	ANSYS
0.5	122.16 Hz	121.81 Hz	109.16	108.67
0.25	116.75 Hz	115.42 Hz	103.10	102.32

Çizelge 1 den görüldüğü gibi, elde edilen sonuçlar ANSYS Workbench programından elde edilen sonuçlara yakın çıkmıştır.

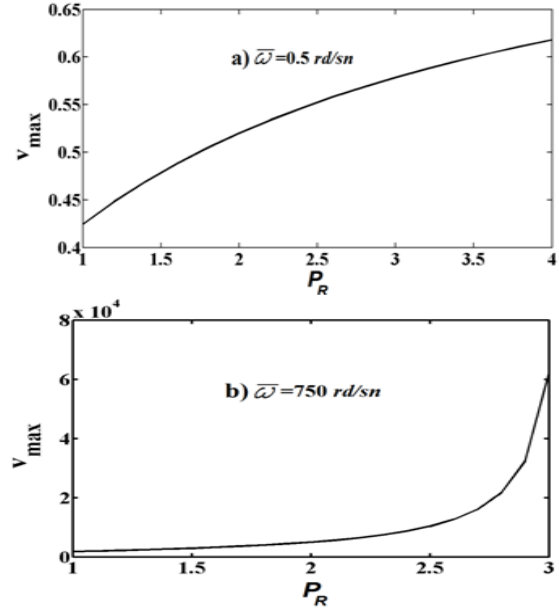
### 3.1. Malzeme Sabit Oranının Etkisi ( $P_R$ ) (The Effect of the Material Constant Ratio ( $P_R$ ))

Bu bölümde, farklı malzeme dağılımlarının, yani farklı malzeme sabit oranlarının ( $P_R$ ) kirişin serbest ile zorlanmış titreşim cevapları üzerindeki etkileri sunulmuştur. Farklı Malzeme sabit oranlarının kirişin doğal frekanslarına olan etkisi şekil 4'de, zorlanmış dinamik yüklem altında oluşan maksimum düşey yer değiştirmeye ( $v_{max}$ ) etkisi de şekil 5'de gösterilmiştir. Şekil 4 ve 5 deki grafiklerde malzeme dağılım oranı sabit olup  $h_o=0.4$  alınmıştır. Şekil 5 de verilen zorlanmış titreşim grafiğinde, zorlayıcı kuvvetin frekansları  $\bar{w}=0.5$  rad/sn ile  $\bar{w}=750$  rad/sn alınmıştır. Şekil 5 deki yük frekans değerleri, elemanın doğal frekansına uzak ve yakın değerler olup, rezonans durumuna uzak ve yakın durumlardaki dinamik etkilerin  $P_R$  oranı ile nasıl değiştiğini görmek amacıyla farklı alınmıştır. Maksimum düşey yer değiştirme hesabında, yükün genlik değerine ulaştığı andaki, kirişin orta noktasının düşey yer değiştirmesi dikkate alınmıştır.



Şekil 4. Malzeme sabit oranı ile doğal frekans arasındaki ilişki (The relationship between the material constant ratio and fundamental frequency).

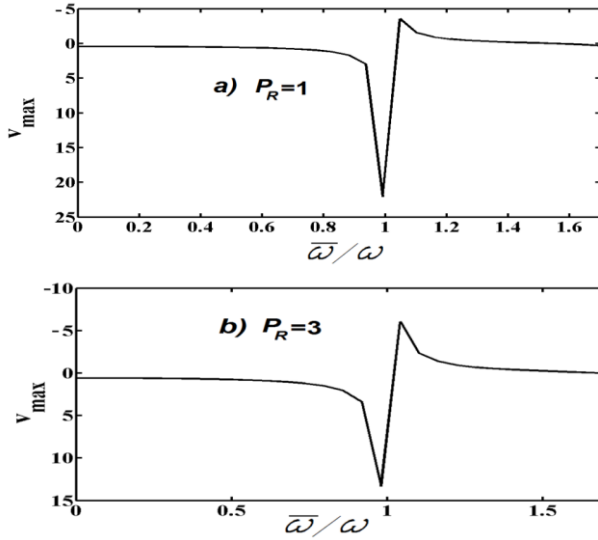
Şekil 4 ve 5'den görülmektedir ki, malzeme sabit oranı ( $P_R$ ) değeri arttıkça doğal frekanslar azalmakta ve yer değiştirmeler ise artmaktadır. Çünkü malzeme sabit oranının artması ile birlikte, alt malzeme sabitleri değeri sabitken üst malzeme sabitleri değerleri düştüğünden dolayı kirişin rijitliği azalmakta, doğal olarak da doğal frekans değerinde azalma ve yer değiştirmeler de artma



Şekil 5. Malzeme sabit oranı ile maksimum düşey yer değiştirme arasındaki ilişki a)  $\bar{w}=0.5$  rad/sn b)  $\bar{w}=750$  rad/sn (The relationship between the material constant ratio and maximum vertical displacement a)  $\bar{w}=0.5$  rad/sn b)  $\bar{w}=750$  rad/sn).

oluşmaktadır. Şekil 5a da, zorlayıcı yükün frekans yapının doğal frekansından uzak olması (rezonans durumundan uzak) durumunda yer değiştirmeler  $P_R$  değerinin artmasıyla birlikte monoton bir biçimde artmaktadır. Şekil 5b de zorlayıcı yükün frekans yapının doğal frekansından yakın olması (rezonans durumundan yakın) durumu için verilen grafikte,  $P_R$  değerinin artmasıyla yer değiştirmeler daha hızlı bir biçimde artmakta ve belli bir  $P_R$  değerinden sonra düşey asimptota yaklaşım sonsuza doğru gitmektedir.

Şekil 6'da malzeme sabit oranının zorlanmış titreşim'e olan etkisi gösterilmiştir. Şekilde, maksimum düşey yer değiştirme ile frekans oranı ( $\bar{w}/w$ ) arasındaki ilişki, farklı malzeme sabit oranlarına göre,  $h_o=0.4$  ve  $q_0=0.5$  GPa için gösterilmiştir. Buradaki frekans oranı ( $\bar{w}/w$ ), zorlayıcı yükün frekansını ile kirişin doğal frekansının oranıdır.

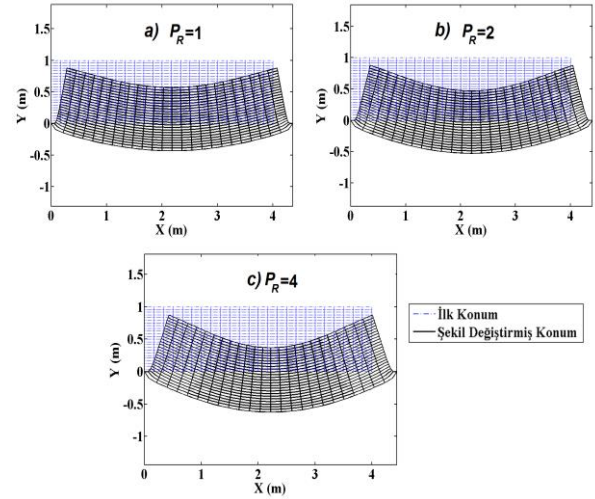


**Şekil 6.** Farklı sabit malzeme oranlarına göre maksimum düşey yer değiştirme ile frekans oranı arasındaki ilişki, a)  $P_R=1$ , b)  $P_R=3$ . (The relationship between the maximum vertical displacement and frequency ratio for different material constant ratio, a)  $P_R=1$ , b)  $P_R=3$ ).

Şekil 6 görüldüğü üzere, frekans oranı 1 değerine yaklaştığında, yani zorlayıcı yükün frekans değeri kirişin doğal frekans değerine yaklaştığında, yer değiştirmeler ciddi biçimde büyümekte ve rezonans durumu ortaya çıkmaktadır. Şekil 6 görülmektedir ki, malzeme sabit oranının artması ile birlikte yer değiştirmeler de artmaktadır.

Malzeme sabit oranının dinamik yer değiştirmeler üzerindeki etkisini daha net görebilmek amacıyla, farklı  $P_R$  değerlerine göre kirişin yer değiştirmiş konumları  $h_o=0.4$ ,  $q_o=0.5$  GPa ve  $\bar{\omega}=0.5$  rd/sn için şekil 7'de gösterilmiştir. Buradaki şekil değiştirmiş konumlar ve diğer şekiller, MATLAB' da algoritma ve program yazılarak elde edilmiştir. Şekil 7'deki konumlar, yükün genlik değerine ulaştığı andaki konumlardır.

Şekil 7'de, kirişin konumları sonlu eleman üzerinde gösterilmiştir. Şekil 7'de görüldüğü üzere,  $P_R$  değerinin yer değiştirmelerin genliği üzerine önemli etkisi olduğu daha net görülmektedir.  $P_R$  oranı büyüdükçe, yer değiştirmeler artmaktadır.  $P_R$  değerlerinin azalması ile birlikte, yapı elemanı daha da dayanıklı olmaktadır. Bu sonuçlardan görülmektedir ki, malzeme sabit oranının, iki malzemeli kirişin mekanik davranışı üzerinde çok önemli bir etkisi vardır.

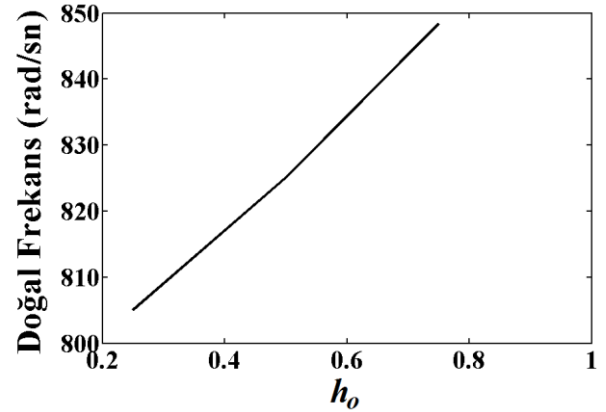


**Şekil 7.** Farklı malzeme sabit oranlarına göre kirişin yer değiştirmiş konumları a)  $P_R=1$ , b)  $P_R=2$ , c)  $P_R=4$  (The deflection shapes of the beam for different material constant ratio a)  $P_R=1$ , b)  $P_R=2$ , c)  $P_R=4$ ).

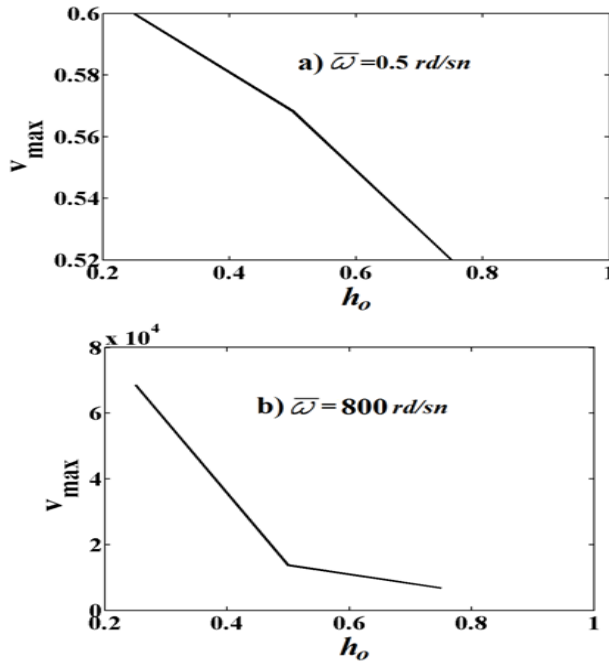
### 3.2. Malzeme Dağılım Oranının Etkisi ( $h_o$ )

(The Effect of the Material Distribution Ratio ( $h_o$ ))

Farklı Malzeme dağılım oranlarının kirişin doğal frekanslarına olan etkisi şekil 8'de, zorlanmış dinamik yüklemeye altında oluşan maksimum düşey yer değiştirmeye ( $v_{max}$ ) etkisi de şekil 9'de gösterilmiştir. Şekil 8 ve 9'deki grafiklerde malzeme sabit oranı sabit olup  $P_R=2$  alınmıştır. Şekil 9 da verilen zorlanmış titreşim grafiğinde, zorlayıcı yayılı yükün genliği  $q_o=0.5$  GPa alınmıştır olup, zorlayıcı kuvvetin frekansları  $\bar{\omega}=0.5$  rad/sn ile  $\bar{\omega}=800$  rad/sn alınmıştır.



**Şekil 8.** Malzeme dağılım oranı ile doğal frekans arasındaki ilişki (The relationship between the material distribution ratio and fundamental frequency).

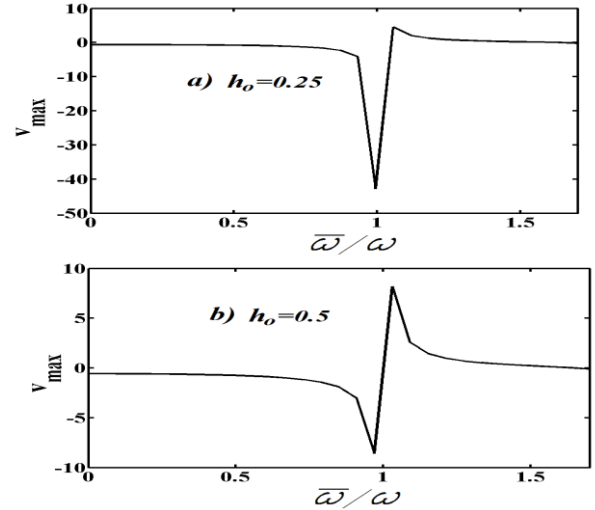


**Şekil 9.** Malzeme dağılım oranı ile maksimum düşey yer değiştirme arasındaki ilişki a)  $\bar{\omega}=0.5$  rad/sn için (The relationship between the material distribution ratio and maximum vertical displacement (for  $q=0.5$  GPa)).

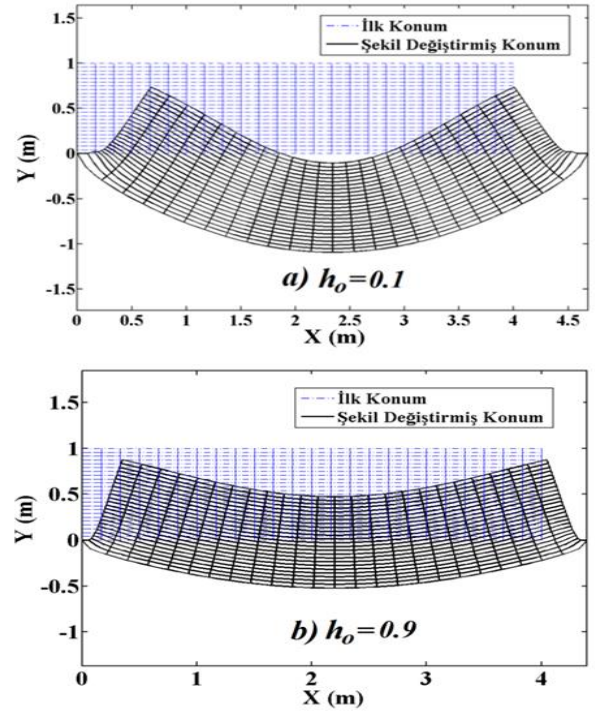
Şekil 8 ve 9'da görüldüğü gibi, malzeme dağılım oranı ( $h_o$ ) değeri arttıkça doğal frekanslar artmakta ve dinamik yer değiştirmeler ise azalmaktadır.  $h_o$  değerinin artması ile birlikte dayanım özellikleri üst malzeme sabitleri değerlerine göre yüksek olan alt malzeme, eşitlik (17b)'e göre hacmi artmakta, bunun neticesinde kirişin dayanımı da artmaktadır.  $h_o$  değerinin artmasına paralel olarak kiriş rijitliğinin de artması sonucunda, doğal frekans değerinde artma ve yer değiştirmeler de azalma olmaktadır. Ayrıca şekil 9 da görülmektedir ki, zorlayıcı yükün frekansının yapının doğal frekansından yakın olması durumunda,  $h_o$  değerinin değişmesiyle yer değiştirmeler daha hızlı değişmektedir.

Şekil 10'da, dinamik yer değiştirme ile frekans oranı arasındaki ilişki farklı  $h_o$  değerleri için gösterilmiştir. Şekil 10'da  $P_R=2$  ve  $q_0=0.5$  GPa değerleri alınmıştır. Şekil 10'da,  $h_o$  değerinin artması ile birlikte dinamik yer değiştirmelerin ciddi biçimde düştüğü görülmektedir. Ayrıca  $h_o$  değerinin artması ile kirişin rezonans durumuna karşı direncin arttığı görülmektedir.

Şekil 11'de, farklı  $h_o$  değerlerine göre iki malzemeli kirişin yer değiştirmiş konumları verilmiştir ( $P_R=4$  için). Şekil 11'de, farklı malzeme dağılımlarının ( $h_o$ ), kirişin zorlanmış titreşim davranışına olan etkisi yer değiştirmiş konumlar üzerinden etkili olduğu görülmektedir.  $h_o$  değerinin artması ile birlikte yer değiştirmeler ciddi biçimde azaldığı görülmektedir. Malzeme dağılımı seçiminin, iki malzemeli kompozit kirişin mekanik davranışı üzerinde önemli bir etkisi olduğu görülmektedir.



**Şekil 10.** Farklı malzeme dağılım oranlarına göre maksimum düşey yer değiştirme ile frekans oranı arasındaki ilişki a)  $h_o=0.25$ , b)  $h_o=0.5$  (The relationship between the maximum vertical displacement and frequency ratio for different material distribution ratio, a)  $h_o=0.25$ , b)  $h_o=0.5$ ).



**Şekil 11.** Farklı malzeme dağılım oranlarına göre kirişin yer değiştirmiş konumları a)  $h_o=0.1$ , b)  $h_o=0.9$  (The deflection shapes of the beam for different material distribution ratio a)  $h_o=0.1$ , b)  $h_o=0.9$ ).

#### 4. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

İncelenen çalışmada, iki malzemeli kompozit basit mesnetli bir kirişin serbest ve zorlanmış titreşimi, düzlem parçalı sürekli ortam modeli ile sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Problemin sayısal çözümleri için MATLAB programında algoritma ve program yazılmıştır. Farklı malzeme oranı ve

dağılımlarının, iki malzemeli kirişin dinamik davranışına olan etkileri incelenmiştir. Elde edilen sonuçlardan da görülmektedir ki, malzeme sabit oranının ve dağılımının, iki malzemeli kirişin dinamik davranışları üzerinde önemli bir etkisi olduğu, kirişin dayanıklılığını önemli derecede etkilediği görülmüştür. Böylesi kompozit yapıların tasarım ve üretilmesinde, en uygun malzeme ve dağılım parametrelerinin seçimi oldukça önemlidir.

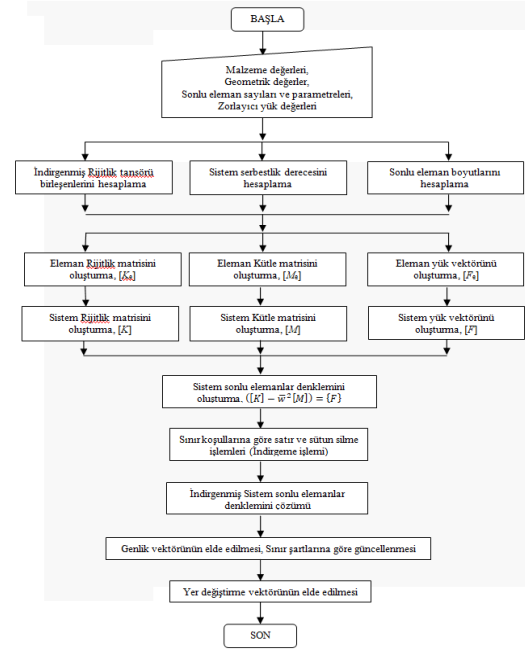
#### KAYNAKLAR (REFERENCES)

- [1] Doyle, J. F., "Force identification from dynamic responses of a bimaterial beam", *Experimental Mechanics*, 33:64-69, (1993).
- [2] Shu, D. ve Fan, H., "Free vibration of bimaterial split beam", *Composites Part B: Engineering*, 27:79-84, (1996).
- [3] Shu, D. ve MSRao, P., "Buckling analysis of bimaterial beams with single asymmetric delamination", *Composite structures*, 64:501-509, (2004).
- [4] Her, S. C. ve Su, W. B., "The Strain Energy Release Rate of a Bi-Material Beam with Interfacial Crack", *In Key Engineering Materials*, 306:369-374, (2006).
- [5] Yu, Y., Ashcroft, I. A. ve Swallowe, G., "An experimental investigation of residual stresses in an epoxy-steel laminate", *International journal of adhesion and adhesives*, 26: 511-519, (2006).
- [6] Zhang, Z. J. ve Paulino, G. H., "Wave propagation and dynamic analysis of smoothly graded heterogeneous continua using graded finite elements", *International Journal of Solids and Structures*, 44: 3601-3626, (2007).
- [7] Della, C. N. ve Shu, D., "Free vibration analysis of delaminated bimaterial beams", *Composite structures*, 80: 212-220, (2007).
- [8] Srinivasan, P. ve Spearing, S. M., "Optimal materials selection for bimaterial piezoelectric microactuators", *Journal of Microelectromechanical Systems*, 17: 462-472, (2008).
- [9] Batra, R.C., Porfiri, M. and Spinello, D., "Free and forced vibrations of a segmented bar by a meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) formulation", *Computational Mechanics*, 41:473-491, (2008).
- [10] Eren, İ., "Analyses of large deflections for logarithmical bimodulus cantilever beams", *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 28:1359-1363, (2008).
- [11] Eren, İ., "İki Malzemeli Kompozit Konsol Kirişlerdeki Büyük Yer Değiştirmelerin İncelenmesi", *Fırat University Journal of Engineering*, 21: 109-114, (2009).
- [12] Wu, G.Y., "The analysis of dynamic instability of a bimaterial beam with alternating magnetic fields and thermal loads", *Journal of Sound and Vibration*, 327:197-210, (2009).
- [13] Lin, I. K., Zhang, X. ve Zhang, Y., "Thermomechanical behavior and microstructural evolution of SiN<sub>x</sub>/Al bimaterial microcantilevers", *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 19: 085010, (2009).
- [14] Carlberger, T. and Stigh, U., "Dynamic testing and simulation of hybrid joined bi-material beam", *Thin-walled structures*, 48:609-619, (2010).
- [15] Ivanova, J., Nikolova, G., Dineva, P. and Becker, W., "Interface Behavior of a Bimaterial Plate under Dynamic Loading", *Journal of engineering mechanics*, 136: 1194-1201, (2010).
- [16] Wang, M. ve Liu, Y., "Analytical solution for bi-material beam with graded intermediate layer", *Composite Structures*, 92:2358-2368, (2010).
- [17] Her, S. C., Lin, C. H. ve Yeh, S. W., "Thermal Stress Analysis of a Bi-Material Layered Structure", *In Key Engineering Materials* 450:161-164, (2011).
- [18] Petrova, V. ve Schmauder, S., "Thermal fracture of a functionally graded/homogeneous bimaterial with system of cracks", *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 55:148-157, (2011).
- [19] Voicu, R., Muller, R. ve Pustan, M., "Investigation of dimensions effect on stress of bi-material cantilever beam", *In Proceedings of the 2011 34th International Spring Seminar on Electronics Technology (ISSE)*, 461-465, (2011).
- [20] Akbaş, Ş.D. "Geometrically nonlinear static analysis of edge cracked Timoshenko beams composed of functionally graded material", *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, (2013).
- [21] Akbaş, Ş.D., "Static analysis of a functionally graded beam with edge cracks on elastic foundation", *In Proceedings of the 9th International Fracture Conference*, İstanbul, (pp. 70-80), (2011).
- [22] Akbaş, Ş.D., "Kirişlerin Geometrik Doğrusal Olmayan Davranışlarının 3 Boyutlu Sürekli Ortam Modeli ile İncelenmesi", *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 17:28-37, (2016).
- [23] Akbaş, Ş.D., "Large post-buckling behavior of Timoshenko beams under axial compression loads", *Structural Engineering and Mechanics*, 51: 955-971, (2014).
- [24] Akbaş, Ş.D., "Wave propagation analysis of edge cracked beams resting on elastic foundation", *International Journal of Engineering & Applied Sciences*, 6: 40-52, (2014).
- [25] Akbaş, Ş.D., "Wave propagation analysis of edge cracked circular beams under impact force", *PLoS one*, 9: e100496, (2014).
- [26] Akbaş, Ş.D., "Large deflection analysis of edge cracked simple supported beams", *Structural Engineering and Mechanics*, 54: 433-451, (2014).
- [27] Akbaş, Ş.D., "Post-buckling analysis of axially functionally graded three-dimensional beams", *International Journal of Applied Mechanics*, 7:1550047, (2015).
- [28] Kocatürk, T. ve Akbaş, Ş.D., "Geometrically non-linear static analysis of a simply supported beam made of hyperelastic material", *Structural Engineering and Mechanics*, 35:677-697, (2010).
- [29] Kocatürk, T. ve Akbaş, Ş.D., "Thermal post-buckling analysis of functionally graded beams with temperature-dependent physical properties", *Steel and Composite Structures*, 15:481-505, (2013).
- [30] Kocatürk, T. ve Akbaş, Ş.D., "Post-buckling analysis of Timoshenko beams with various boundary conditions under non-uniform thermal loading", *Structural Engineering and Mechanics*, 40: 347-371, (2011).
- [31] Akbaş, Ş.D. ve Kocatürk, T., "Post-buckling analysis of a simply supported beam under uniform thermal

- loading", *Scientific Research and Essays*, 6:1135-1142, (2011).
- [32] Akbaş, Ş.D. ve Kocatürk, T., "Post-buckling analysis of Timoshenko beams with temperature-dependent physical properties under uniform thermal loading, *Structural Engineering and Mechanics*, 44: 109-125, (2012).
- [33] Akbaş, Ş.D. ve Kocatürk, T., "Post-buckling analysis of functionally graded three-dimensional beams under the influence of temperature, *Journal of Thermal Stresses*, 36: 1233-1254, (2013).
- [34] Kocatürk, T. Eskin, A. ve Akbaş, Ş.D. "Wave propagation in a piecewise homogenous cantilever beam under impact force", *International Journal of Physical Sciences*, 6: 3867-3874, /2011(.
- [35] Suhir, E. ve Nicolics, J., " Bending of a bi-material cantilever beam, with consideration of the role of the interfacial shearing stress", *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 92:573-582, (2012).
- [36] Wu, G. Y., "Non-linear vibration of bimaterial magneto-elastic cantilever beam with thermal loading", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 55:10-18, (2013).
- [37] Liu, Y. ve Shu, D. W., "Analytical solution of the vibration of delaminated bimaterial beams fully or partially supported by elastic foundation", *In Applied Mechanics and Materials*, 394: 75-79, (2013).
- [38] Petrova, V. ve Schmauder, S., "Modelling of thermal fracture of functionally graded/homogeneous bimaterial structures under thermo-mechanical loading", *In Key Engineering Materials*, 592:145-148, (2014).
- [39] Chama, M., Boutabout, B., Lousdad, A., Bensmain, W. ve Bouiadjra, B.A.B., "Crack propagation and deviation in bi-materials under thermo-mechanical loading", *Structural Engineering and Mechanics*, 50: 441-457, (2014).
- [40] Li, A.Q., Zhou, S.J., and Zhou, S.S., "The Size-Dependent Inherent Property Of Bilayered Micro-Beams", *Engineering Mechanics*, 31: 223-228, (2014).
- [41] ANSYS Workbench Release 14.0, SAS IP, Inc.

## EKLER (APPENDİK)

Zorlanmış titreşim çözümü için MATLAB'da yazılan programın algoritması:



Serbest titreşim çözümü için MATLAB'da yazılan programın algoritması:

